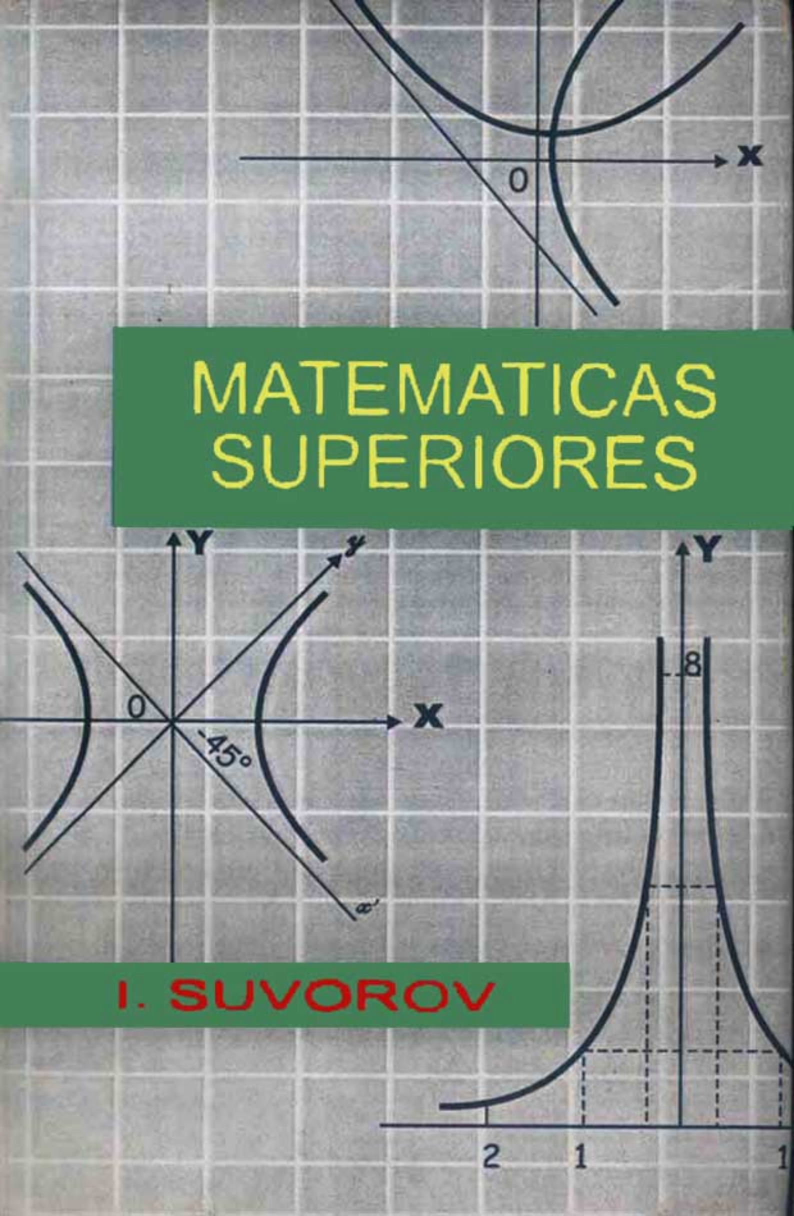
MATEMATICAS SUPERIORES

I. SUVOROV



ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

И. СУВОРОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Для техникумов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

На испанском языке

I. SUVOROV

CURSO DE MATEMATICAS SUPERIORES

CUARTA EDICION

EDITORIAL MIR • MOSCU

СДU 51(075.3) = 60

Traducido del ruso por
J. Vela Rodríguez y J. José Toloza

Impreso en la URSS, 1973

$C \frac{0223-381}{041(01)-73}$

A. FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA ANALITICA PLANA

CAPITULO I

METODO DE COORDENADAS

§ 1. Coordenadas de un punto

1°. Se denomina *método de coordenadas* el procedimiento empleado para determinar con ayuda de números la posición de un punto con relación a los ejes de coordenadas.

El *eje de coordenadas* es una recta (en la figura 1, Ox), en la que se tiene:

1) un punto O, origen de coordenadas;

2) una direccíon positiva (en la figura 1, de izquierda a derecha);

3) una unidad de medida de los segmentos l, llamada también unidad de escala.

La distancia de cualquier punto M del eje al origen O (el segmento OM) puede ser medida con la unidad establecida l, es decir, quedará expresada por un número.

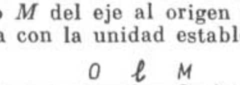


Fig. 1

A este número se le pone el signo "más", si la dirección desde el origen O hasta el punto M coincide con la dirección positiva del eje, y se le coloca el signo "menos", en el caso de que sea opuesta a la dirección positiva del eje. De este modo, a cada punto M del eje de coordenadas *le corresponde un número determinado. A este número se* le llama coordenada del punto M. Debe señalarse que la coordenada del origen O es igual a cero.

Recíprocamente: a cada número real le corresponde en el eje de coordenadas un punto cuya coordenada se expresa con este número, conforme a la unidad de medida dada.

2°. Dos ejes de coordenadas Ox y Oy, perpendiculares entre sí, que se cortan en un punto O (fig. 2), forman un sistema de coordenadas rectangulares, o cartesianas *.

La dirección positiva de cada eje aparece indicada en la figura con una flecha.

Los ejes Ox y Oy dividen el plano en cuatro regiones, llamadas *cuadrantes*, y están numeradas como sigue: el 1er cuadrante es la parte del plano entre $+Ox$ y $+Oy$;

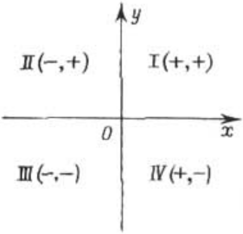


Fig. 2

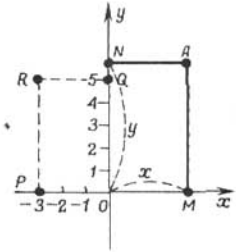


Fig. 3

el 2°, entre $+Oy$ y $-Ox$; el 3°, entre $-Ox$ y $-Oy$, y el 4°, entre $-Oy$ y $+Ox$.

Para determinar por medio de números la posición de un punto A en el plano respecto al sistema de coordenadas dado (fig. 3), se baja desde el punto A una perpendicular AM al eje Ox y otra perpendicular AN al eje Oy. Los puntos M y N de intersección de estas perpendiculares con los ejes Ox y Oy respectivamente, se denominan proyecciones del punto A sobre los ejes de coordenadas. Sea el número x la coordenada del punto M en el eje Ox, y el número y, la coordenada del punto N en el eje Oy.

D e f i n i c i ó n. *El número x, que es la coordenada de la proyección del punto A sobre el eje Ox, se llama abscisa del punto A. El número y, que es la coordenada de la proyección del punto A sobre el eje Oy, se llama ordenada del punto A.*

* El sistema de coordenadas rectangulares fue denominado cartesiano en honor al matemático francés René Descartes, que fue el primero que publicó (año 1637) un trabajo de geometría analítica, en el que exponía la idea fundamental de ésta, consistente en que una ecuación en la que figuran x e y determina una línea.

De acuerdo con esta definición, el eje Ox se llama eje de abscisas, y el eje Oy, eje de ordenadas.

Abreviando: si *el punto A tiene las coordenadas x e y*, se indica *punto A (x, y)*, con la particularidad de que la abscisa se coloca en primer lugar, y la ordenada, en segundo.

En dependencia del cuadrante en que se encuentre el punto A, se determinan los signos de su abscisa y su ordenada. En la fig. 2 se indican los signos de la abscisa y de la ordenada para cada cuadrante, conviniendo en que el primer signo es el de la abscisa, y el segundo, el de la ordenada.

Si el punto A se encuentra en el eje Ox (Oy), su ordenada (abscisa) será igual a cero.

3°. Con arreglo al procedimiento indicado, para cada punto del plano pueden ser determinadas sus coordenadas. Viceversa: por medio de las coordenadas dadas puede ser encontrado el punto en el plano. Por ejemplo, $(-3;\ 5)$ son las coordenadas del punto R. Tomando desde el origen O tres unidades de escala, a la izquierda, por el eje Ox, y cinco unidades hacia arriba, por el eje Oy, obtenemos en el eje Ox el punto P, y en el eje Oy, el punto Q (fig. 3). Y trazando las rectas PR y QR, paralelas respectivamente a los ejes Oy y Ox, se obtiene en su intersección el punto buscado $R\ (-3;\ 5)$.

4°. Las coordenadas x e y del punto A en el plano son números iguales a las razones que forman respectivamente los segmentos OM y ON con la unidad de escala. Tomando para los dos ejes como unidad de escala la longitud del segmento l, tendremos:

$$x = \frac{OM}{l}, \quad y = \frac{ON}{l}. \tag{1}$$

Estas razones suelen abreviarse así:

$$x = OM, \quad y = ON,$$

donde en este caso OM u ON no representan el segmento orientado OM u ON, sino el número que lo mide, siendo $l = 1$, tomado con signo "más" o "menos" según la dirección del segmento. Tal notación, además de su simplicidad, es cómoda porque así las coordinadas x e y adquieren una representación gráfica.

§ 2. Suma de dos segmentos orientados

En la geometría analítica, los segmentos se caracterizan no sólo por su longitud, sino también por su dirección. Cuando en dos segmentos: 1) las rectas, determinadas por *sus segmentos, son paralelas o coinciden*, 2) *las direcciones* desde los orígenes de los segmentos a sus extremos son las mismas (o contrarias), se les llama igualmente (o contrariamente) orientados.

Al designar los segmentos orientados por medio de dos *letras, la primera indica el origen del segmento, y la segunda*, el extremo. Los segmentos AB y BA tienen igual longitud, pero dirección contraria:

$$AB = -BA.$$

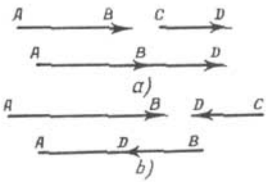


Fig. 4

En algunos casos la dirección de un segmento se señala con una flecha colocada al final de éste (fig. 4, *a* y *b*).

Para obtener la suma de dos segmentos igualmente o contrariamente orientados AB y CD (fig. 4, *a* y *b*), hay que colocarlos en una línea recta de tal modo que el origen del segundo segmento, el punto C, coincida con el extremo del primer segmento, el punto B. Entonces, el origen del primer segmento, el punto A, y el extremo del segundo, el punto D, constituirán el origen y el extremo del segmento, equivalente a la suma de AB y CD:

$$AB + CD = AD.$$

§ 3. La distancia entre dos puntos

1°. Se *denomina magnitud de un segmento*, situado en un eje de coordenadas, al valor de su longitud, tomado con signo "más", si la dirección del segmento coincide con la dirección positiva del eje, y con signo "menos" en caso de que sea opuesta a la dirección positiva del eje.

Teorema. *La magnitud de un segmento, situado en el eje de coordenadas, es igual a la diferencia de las coordenadas del extremo y del origen del mismo*, es decir, si el origen y el exteremo del segmento M_1M_2 tienen las coordenadas x_1 y x_2 (ó y_1 e y_2), se tiene:

$$\boxed{M_1M_2 = x_2 - x_1 \quad \text{ó} \quad (M_1M_2 = y_2 - y_1).} \qquad (1)$$

D e m o s t r a c i ó n. Hay seis casos posibles de ubicación de los puntos M_1 y M_2 entre sí y respecto al origen O (fig. 5).

Según la regla de la adición de los seomentos orientados tendremos:

en los casos I y II,

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2,$$

de aquí que

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1.$$

Pero $OM_1 = x_1$ y $OM_2 = x_2$, por lo tanto en ambos casos resultará

$$M_1M_2 = x_2 - x_1;$$

en los casos III y IV,

$$M_1 + CM_2 = M_1M_2.$$

Pero $M_1O = -OM_1 = -x_1, OM_2 = x_2$ por lo que

$$M_1M_2 = x_2 - x_1;$$

en los casos V y VI,

$$M_1M_2 + M_2O = M_1O;$$

de donde resulta que

$$M_1M_2 = M_1O - M_2O,$$

ó

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1.$$

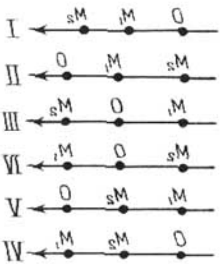


Fig. 5

puesto que $M_1O = -OM_1$ y $M_2O = -OM_2$. Pero como $OM_2 = x_2$ y $OM_1 = x_1$, se tiene

$$M_1M_2 = x_2 - x_1.$$

En el caso particular, cuando el origen del segmento coincide con el de coordenadas ($x_1 = 0$), la fórmula (1) muestra que la magnitud del segmento es la coordenada de su extremo.

2°. E j e m p l o s. 1. La magnitud del segmento que tiene como origen y extremo los puntos M_1 (3; 0) y M_2 (5; 0), es

$$M_1M_2 = 5 - 3 = 2.$$

2. Si los puntos $M_1(-3; 0)$ y $M_2(-5; 0)$, se tiene

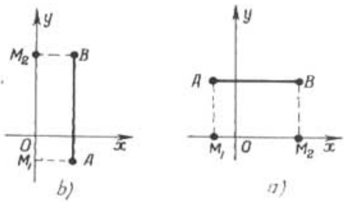
$$M_1M_2 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2.$$

3. Si los puntos M_1 (0; -2) y M_2 (0; 3), se tiene que $M_1M_2 = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$.

3°. C o r o l a r i o. *La magnitud del segmento AB* (fig. 6), *que es paralelo al eje de las abscisas* (*o de las ordenadas*) *es igual a la diferencia entre las abscisas* (*ordenadas*) *del extremo y del origen del segmento, es decir,*

$$\boxed{AB = x_2 - x_1, \quad \text{ó} \quad AB = y_2 - y_1} \qquad (1)$$

En efecto, si de los puntos dados bajamos las perpendiculares AM_1, y BM_2, al eje de abscisas (fig. 6, *a*) o al eje de ordenadas (fig. 6, *b*), vemos que el segmento AB



F i g. 6

tiene la misma longitud que el segmento M_1M_2 (como lados opuestos de un rectángulo) y que está igualmente orientado, es decir

$$AB = M_1M_2 = x_2 - x_1 \ (\text{ó } y_2 - y_1).$$

4°. Si nos interesa solamente la longitud del segmento AB, siéndonos indiferente su dirección, el número obtenido por medio de la fórmula (I) hay que tomarlo en su valor absoluto, o sea,

$$\boxed{\text{long. de } AB = |x_2 - x_1| \text{ ó long. de } AB = |y_2 - y_1|.} \qquad (\text{Ia})$$

5°. Si el segmento AB no es paralelo a ninguno de los ejes de coordenadas, se entiende que su magnitud es igual a la longitud del mismo.

P r o b l e m a. *Hállese la distancia entre los puntos* $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.

S o l u c i ó n. De los puntos A y B (fig. 7) se bajan las perpendiculares AM_1 y BM_2 al eje Ox, y las perpendiculares AN_1 y BN_2 al eje Oy. Prolongando AN_1 hasta la intersección con BM_2, de acuerdo con el teorema de Pitágoras tendremos en el triángulo ACB:

$$AB=\sqrt{AC^2+CB^2}.$$

Pero las longitudes de AC y CB son respectivamente iguales a $|x_2-x_1|$ y $|y_2-y_1|$.

Colocando estos valores bajo el radical se obtendrá:

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},} \qquad \text{(II)}$$

es decir, *la distancia entre dos puntos dados es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias entre las coordenadas homónimas de estos puntos.*

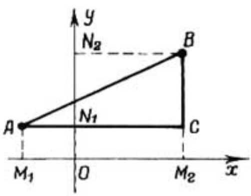


Fig. 7

6°. Según la fórmula (II), la distancia del punto $A(x, y)$ al origen de coordenadas $O(0, 0)$ es $OA=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$, o lo que es lo mismo

$$\boxed{OA=\sqrt{x^2+y^2},} \qquad \text{(III)}$$

es decir, *la distancia de un punto al origen de coordenadas es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las coordenadas de este punto.*

7°. E j e m p l o s. 1. Hállese la distancia entre los puntos A (—4; 3) y B (0; 6).

S o l u c i ó n. Según la fórmula (III)

$$AB=\sqrt{(0+4)^2+(6-3)^2}=\sqrt{16+9}=5.$$

2. Determínese un punto equidistante de los puntos (0; 0), (7; —7) y (8; 0).

S o l u c i ó n. Sean x e y las coordenadas del punto que se busca. La distancia desde el punto (x, y) hasta el primer punto dado es igual a $\sqrt{x^2+y^2}$; hasta el segundo, $\sqrt{(x-7)^2+(y+7)^2}$; hasta el tercero, $\sqrt{(x-8)^2+y^2}$. Según lo convenido, todas estas distancias son iguales; el primer radical lo igualamos sucesivamente al segundo y al tercero:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-7)^2+(y+7)^2},$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-8)^2+y^2}$$

Elevando estas ecuaciones al cuadrado y abriendo los paréntesis después de reducir los miembros semejantes, se obtiene el sistema de ecuaciones $x - y = 7$ y $x = 4$. Sustituyendo en la primera ecuación la x por 4, tendremos que $y = -3$. El punto buscado es (4; —3).

§ 4. División de un segmento proporcionalmente a una razón dada

1°. Problema. *Conociendo las coordenadas* x_1, y_1 *del punto* A (fig. 8) *y las coordenadas* x_2, y_2 *del punto* B, *hállense las coordenadas* x, y, *de un tercer punto* C, *que divide al segmento* AB *de tal modo que la razón* $\frac{AC}{CB}$ *es igual al número* λ.

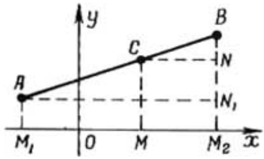


Fig. 8

Solución. Desde los puntos A, B, C se trazan las rectas AM_1, BM_2 y CM paralelas al eje Oy. Estas rectas cortan los segmentos AB y M_1M_2 en partes proporcionales:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{AC}{CB}. \qquad (1)$$

Pero de acuerdo con la fórmula (I) $M_1M = x - x_1$, $MM_2 = x_2 - x$, y $\frac{AC}{CB} = \lambda$ (según lo convenido).

Sustituyendo estos valores en la proporción (I) tendremos:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

Despejando la x en esta ecuación, resultará:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}} \qquad (IV)$$

Trazando desde los puntos A, B y C rectas paralelas al eje Ox, análogamente a lo expuesto, resultará:

$$\boxed{y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.} \qquad (IV)$$

2°. Ejemplo. Hállense los puntos que dividen en tres partes iguales el segmento limitado por los puntos A (4; —3) y B (—5; 0).

S o l u c i ó n. Supongamos que C y D (fig. 9) son los puntos buscados en el segmento AB. Se tiene

$$\frac{AC}{CB}=\frac{1}{2}, \quad \text{y} \quad \frac{AD}{DB}=2.$$

Por lo tanto, al buscar las coordenadas de los puntos C y D por medio de las fórmulas (IV), hay que tomar a λ equivalente a $\frac{1}{2}$ para el punto C, e igual a 2 para el punto D. Sustituyendo $x_1 = 4$, $y_1 = -3$, $x_2 = -5$, $y_2 = 0$, $\lambda_C = \frac{1}{2}$, $\lambda_D = 2$, se tiene:

$$x_C=\frac{4+\frac{1}{2}\cdot(-5)}{1+\frac{1}{2}}=1; \quad y_C=\frac{-3+\frac{1}{2}\cdot 0}{1+\frac{1}{2}}=-2.$$

$$x_D=\frac{4+2\cdot(-5)}{1+2}=-2; \quad y_D=\frac{-3+2\cdot 0}{1+2}=-1.$$

Los puntos buscados son: $C\,(1;\ -2)$, $D\,(-2;\ -1)$.

3°. Si el punto C divide al segmento AB por la mitad, entonces $AC = CB$ y $\lambda = \frac{AC}{CB} = 1$, y las fórmulas (IV) toman la siguiente forma:

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.} \qquad \text{(V)}$$

F i g. 9

4°. N o t a. El punto de división C puede encontrarse en la recta AB y fuera del segmento AB; en este caso se dice que el punto C divide a la recta exteriormente; en este caso los segmentos AC y CB son de sentidos opuestos, λ es un número negativo y las fórmulas (IV), conservan su forma.

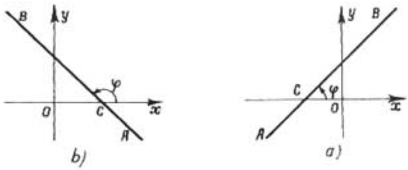
§ 5. Angulo formado por una recta y el eje

1°. D e f i n i c i ó n. *Se llama ángulo formado por la recta AB con el eje Ox* (fig. 10) *a aquel ángulo mínimo en el que hay que hacer girar la dirección positiva de eje Ox en sentido contrario al de las agujas del reloj, para que coincida con la recta AB, o sea paralela a ella.*

En las figuras 10 *a* y *b*, este ángulo es xCB.

2°. P r o b l e m a. *Hállese el ángulo formado con el eje Ox por la recta que pasa por los puntos A (x_1, y_1) y B (x_2, y_2).*

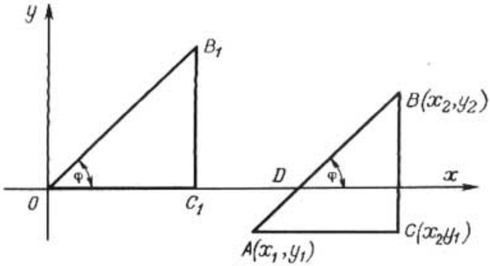
S o l u c i ó n. Supongamos que la recta AB forma con el eje Ox un ángulo xDB, igual a φ (figs. 11 y 12). Tracemos $AC \parallel Ox$ y $BC \parallel Oy$ hasta su intersección en el punto C.



F i g. 10

Las coordenadas del punto C son x_2 e y_1.

Traslademos el triángulo ABC hasta que su vértice A coincida con el origen de coordenadas O. Entonces el



F i g. 11

triángulo ocupará la posición OB_1C_1 (figs. 11 y 12)

$$\angle xOB_1 = \angle xOB = \varphi.$$

La tangente del ángulo xOB_1 es (por definición) la razón de la ordenada del punto B_1 a su abscisa, es decir,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1B_1}{OC_1}.$$

Ya que

$$C_1B_1 = CB = y_2 - y_1,$$
$$OC_1 = AC = x_2 - x_1,$$

se obtiene

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.}\qquad \text{(VI)}$$

La fórmula (VI), en particular, es válida cuando los puntos A y B están situados en una recta paralela al eje de las abscisas, o en èl propio eje.

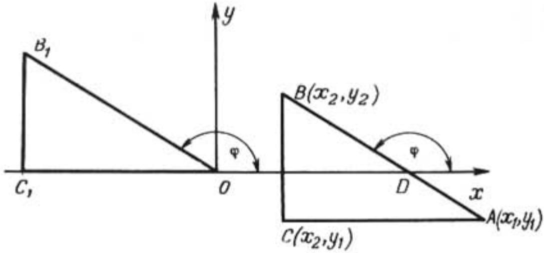


Fig. 12

En este caso,

$$y_2=y_1,\quad y_2-y_1=0,$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{0}{x_2-x_1}=0.$$

Si AB es paralela al eje de las ordenadas, entonces

$$x_2=x_1,\quad x_2-x_1=0,$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y_2-y_1}{0},$$

es decir, que tg φ no existe.

3°. Ejemplo. Hállese el ángulo que forma con el eje Ox la recta que une los puntos A $(-2; 1)$ y B $(2; -3)$.

Solución. Haciendo en la fórmula (VI) las sustituciones $x_1=-2$, $x_2=2$, $y_1=1$, $y_2=-3$, tendremos:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-3-1}{2-(-2)}=-1,$$

$$\varphi=135°.$$

§ 6. Condición de paralelismo y de perpendicularidad

En este párrafo se trata de las rectas que no son paralelas al eje Oy.

1°. Definición. *La tangente del ángulo que forma una recta con el eje Ox se llama coeficiente angular de la recta, o también inclinación de la recta respecto al eje Ox.*

2°. Si $AB \parallel CD$ (fig. 13), los ángulos φ y α, que forman las rectas AB y CD con el eje Ox, son iguales (por ser "correspondientes").

Por lo tanto

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha.} \tag{VII}$$

La condición de paralelismo de las rectas consiste en que los coeficientes angulares de estas rectas son iguales.

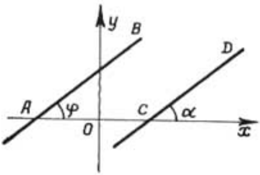


Fig. 13

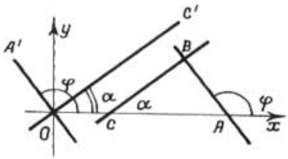


Fig. 14

3°. Supongamos que $AB \perp BC$ (fig. 14) y que la recta AB forma con el eje Ox un ángulo igual a φ y la recta BC, un ángulo igual a α.

Tracemos del origen de coordenadas O unas rectas OA' y OC', paralelas a AB y BC respectivamente. Entonces, φ es también el ángulo en el cual hay que hacer girar Ox, en el sentido contrario a las agujas del reloj, para que coincida con OA', y α es el ángulo en el que Ox tiene que girar del mismo modo para que coincida con OC'. Como $OA' \perp OC'$, la diferencia entre φ y α es 90°:

$$\varphi - \alpha = 90^\circ.$$

De donde:

$$\varphi = 90^\circ + \alpha,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Por consiguiente

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}} \qquad \text{(VIII)}$$

La condición de perpendicularidad de dos rectas consiste en que los coeficientes angulares son recíprocos en valor y de signo contrario.

N o t a. Las igualdades (VII) y (VIII) son condiciones necesarias de paralelismo y de perpendicularidad de rectas. Se puede demostrar, aplicando la fórmula (XXV), que estas condiciones son también suficientes.

CAPITULO II

LA RECTA

§ 7. Concepto de la ecuación de la línea. Objeto de la geometría analítica en el plano

1°. Supongamos que la línea está definida en el plano por las propiedades de sus puntos *. Estudiaremos esta línea en el sistema de coordenadas cartesianas xOy. Por las propiedades de los puntos que definen a la línea dada, se puede hallar la relación entre las coordenadas x e y de sus puntos y expresar la línea por una ecuación que relacione las coordenadas x, y de sus puntos. Aclaremos esto con ejemplos.

Ejemplo. 1. *Expresar por medio de una ecuación el lugar geométrico de los puntos en el plano, equidistantes de los puntos A $(2; 8)$ y B $(5; 3)$.*

Solución. La planimetría enseña que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos dados A y B (fig. 15) es la recta MN, perpendicular al segmento AB, que pasa por su punto medio C.

Tomemos en la recta MN un punto cualquiera Q, cuyas coordenadas sean (x, y). Las distancias del punto Q a los puntos dados A y B se determinan por medio de la fórmula (II):

$$AQ=\sqrt{(x-2)^2+(y-8)^2}, \quad BQ=\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2},$$

y como, según los datos del problema, estas distancias son iguales, es decir, $AQ=BQ$, se tiene

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-8)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}. \qquad (1)$$

---

* La línea como concepto matemático pertenece al grupo de los conceptos más difíciles de la matemática. Nosotros nos basamos aquí en aquella noción elemental de líneas dadas en la escuela media como lugar geométrico de puntos que poseen una determinada propiedad. Los interesados en el concepto de línea, pueden consultar el libro de A. S. Parjomenco "Qué es la línea". Edit. Gostejisdat, 1954.

Si el punto $Q(x, y)$ se desplaza por la recta MN, los valores de x e y varían, pero en una proporción tal que no se altera la igualdad dada (1). De este modo, la igualdad (1) representa una ecuación que es satisfecha por las coordenadas de todos los puntos de la recta MN sin excepción. Al mismo tiempo, a esta igualdad no satisfacen las coordenadas de ningún punto del plano que no esté situado en la recta MN. En efecto, si el punto Q se encontrara fuera de la recta MN, no estaría a la misma distancia de los puntos A y B, $AQ \neq BQ$, y se alteraría la igualdad (1).

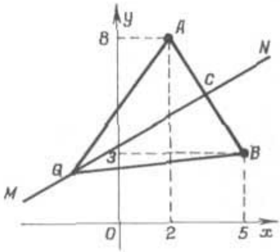


Fig. 15

Elevando al cuadrado ambas partes de la igualdad (1) y abriendo los paréntesis, tendremos:

$$x^2-4x+4+y^2-16y+64=x^2-10x+25+y^2-6y+9,$$

o

$$3x-5y+17=0. \qquad (2)$$

Una ecuación respecto a x e y se llama ecuación de la línea dada si la satisfacen las coordenadas x, y de todos los puntos de la línea dada y sólo de éstos.

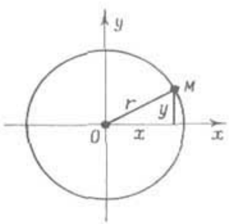


Fig. 16

La ecuación (2) se llama ecuación de la recta MN ya que la satisfacen las coordenadas de todos los puntos de la recta MN y sólo de éstos.

E j e m p l o 2. Escribir la ecuación de una circunferencia de radio r, con centro en el origen de coordenadas (fig. 16).

S o l u c i ó n. Se fija en la circunferencia un punto arbitrario M y se designan sus coordenadas por x, y. Por la definición de la circunferencia, la distancia de todo punto de la circunferencia al origen es igual a r. La distancia del punto M

(x, y) al origen 0 es $\sqrt{x^2+y^2}$ (fórmula III). Por consiguiente,

$$\sqrt{x^2+y^2}=r, \quad \text{o} \quad x^2+y^2=r^2. \tag{3}$$

Las coordenadas de todos los puntos de la circunferencia dada, y sólo de éstos, satisfacen a la ecuación obtenida (3), (ya que para cualquier punto (x, y), que no pertenece a la circunferencia dada, $x^2+y^2 \neq r^2$).

La ecuación $x^2+y^2=r^2$ se llama *ecuación de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas.*

2°. Para la designación de una ecuación de dos variables x, y, se emplea el símbolo $F(x, y) = 0$, (que se lee: "efe de x y de y es igual a cero").

En el sistema de coordenadas cartesianas xOy cada par de números reales x, y determina un punto en el plano, y la ecuación $F(x, y) = 0$ en general determina el lugar geométrico de todos aquellos puntos, cuyas coordenadas x, y satisfacen a la ecuación $F(x, y) = 0$.

La ecuación $F(x, y) = 0$ se llama ecuación de la línea dada en el plano xOy, si la satisfacen las coordenadas x, y de todos los puntos de la línea y solamente de éstos.

3°. En el curso general de geometría analítica en el plano hay dos problemas fundamentales:

1) dada una línea, definida geométricamente por las propiedades de sus puntos, hallar su ecuación;

2) dada una ecuación $F(x, y) = 0$, la tarea consiste en estudiar la ecuación, y determinar la forma de la línea, como lugar geométrico de todos aquellos puntos del plano xOy, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada.

En geometría analítica estos problemas se estudian para un grupo restringido de líneas, precisamente sólo para líneas, cuyas ecuaciones son de primero o segundo grado respecto a x, y:

$$Ax+By+C=0, \tag{4}$$

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \tag{5}$$

La línea cuya ecuacion es algebraica se llama *línea algebraica*, y el grado de su ecuación se llama *orden de la línea* (se supone que la ecuación es reducida a la forma racional y entera con respecto a x, y).

La línea (4) es de primer orden, y la (5), de segundo orden.

El contenido básico del curso de geometría analítica en el plano es el estudio de las líneas algebraicas de primero y segundo orden aplicando el método de coordenadas y medios algebraicos.

§ 8. La ecuación de la recta en función del coeficiente angular

1°. Teorema. *Toda recta se representa por una ecuación de primer grado, respecto a las coordenadas variables.*

Demostración. 1er caso. La recta MN (fig. 17) no es paralela al eje Oy.

En este caso la recta MN corta el eje Oy formando con el eje Ox un ángulo $\varphi \neq 90°$. Sea la ordenada del punto de intersección de MN y Oy igual a b. Fijando en la recta MN un punto cualquiera $Q(x, y)$, y empleando la fórmula (VI) resulta $tg\ \varphi = \frac{y-b}{x}$, de donde $y = x\,tg\,\varphi + b$.

Suponiendo que $tg\ \varphi = k$ se tiene

$$\boxed{y = kx + b,} \qquad \text{(IX)}$$

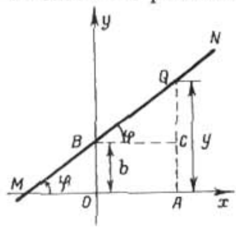


Fig. 17

es decir, una ecuación de primer grado respecto a las coordenadas variables x e y.

A esta ecuación satisfacen también las coordenadas $(0, b)$ del punto B, que es el punto de intersección de la recta MN con el eje Oy. En efecto, sustituyendo en la ecuación (IX) x por cero y y por el número b, se obtiene la identidad:

$$b = b.$$

Pueden darse tres casos particulares.

1. Si la recta MN pasa por el origen de coordenadas O (fig. 18), la ordenada del punto de intersección de ésta con el eje Oy $b = 0$ y la ecuación (IX) toma la forma:

$$\boxed{y = kx.} \qquad \text{(X)}$$

Satisfacen a esta ecuación las coordenadas de todos los puntos de la recta MN, y entre ellas, las del origen (0; 0).

2. Si la recta MN es paralela al eje Ox (fig. 19), es decir, el ángulo $\varphi = 0$ y $k = \operatorname{tg}\varphi = 0$, la ecuación (IX) toma la forma:

$$\boxed{y = b.} \qquad \text{(XI)}$$

En la igualdad (XI) no figura la x. Sin embargo, expresa la correlación entre x e y: a cada valor de x, es decir,

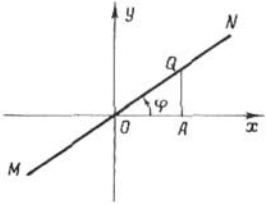


Fig. 18

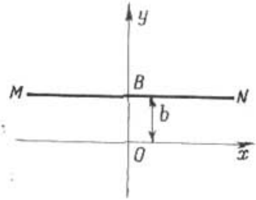
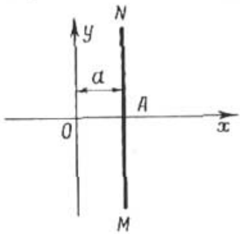


Fig. 19

a cada punto de la recta paralela a Ox, la ordenada es igual a b, y viceversa: cada punto del plano, cuya ordenada es igual a b, pertenece a esta recta.



F g. 20

3. Si la recta coincide con el eje Ox, sustituyendo en la ecuación (XI) $b = 0$, se obtiene la ecuación del eje de las abscisas:

$$\boxed{y = 0.} \qquad \text{(XII)}$$

2° caso. La recta MN es paralela al eje Oy (fig. 20).

Supongamos que la abscisa del punto de intersección de ésta con el eje Ox es igual a a. La ecuación de tal recta es

$$\boxed{x = a,} \qquad \text{(XIII)}$$

En efecto, la abscisa de cada punto de la recta paralela al eje Oy (es decir, para cada valor de y) es igual a a, y viceversa, cada punto del plano, cuya abscisa es igual a a, pertenece a esta recta.

Si la recta coincide con el eje Oy, en este caso $a = 0$, y de la ecuación (XIII) obtenemos la ecuación del eje Oy:

$$\boxed{x = 0.} \tag{XIV}$$

De este modo, cualquier recta se expresa mediante una ecuación de primer grado respecto a las coordenadas variables.

2°. En la ecuación (IX) k es el *coeficiente angular* de la recta, e $y = kx + b$ se llama *ecuación de la recta en función del coeficiente angular*. El término independiente b de la ecuación se llama *ordenada inicial* u ordenada en el origen, porque si $x = 0$, de la ecuación (IX) resulta que $y = b$. El coeficiente angular k y la ordenada inicial b para la recta dada son números constantes y constituyen los *parámetros* de la ecuación de la recta. En general, se llama parámetros a los números constantes que caracterizan al objeto y lo distinguen entre otros objetos homogéneos. Las coordenadas x e y de un punto arbitrario de una recta se llaman *coordenadas corrientes.*

§ 9. Ecuación general de la recta y casos particulares

1. Teorema recíproco. *Toda ecuación de primer grado respecto a las coordenadas x, y, representa una recta.*

Demostración. La ecuación de primer grado respecto a x, y, tiene la forma:

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \tag{XV}$$

Supongamos que $B \neq 0$. Resolviendo la ecuación (XV) respecto a y, se tiene:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Comparando esta ecuación con la (IX), resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{A}{B} &= k = \operatorname{tg}\varphi \qquad \text{(XVI)} \\ -\frac{C}{B} &= b \qquad \text{(XVII)} \end{aligned}},$$

es decir, la ecuación $Ax + By + C = 0$, $B \neq 0$, representa una recta con el coeficiente angular $k = -\frac{A}{B}$ y la ordenada inicial $b = -\frac{C}{B}$.

En particular, si:

1) $C = 0$. La ecuación (XV) tiene la forma:

$$\boxed{Ax + By = 0} \qquad \text{(XVIII)}$$

y representa una recta que pasa por el origen de los ejes de coordenadas, porque las coordenadas del origen (0, 0) *satisfacen a la ecuación (VVIII).*

2) $A = 0$. La ecuación (XV) tiene la forma:

$$\boxed{By + C = 0} \qquad \text{(XIX)}$$

Despejando la y:

$$y = -\frac{C}{B}, \quad \text{o} \quad y = b,$$

llegamos a la conclusión (fórmula XI) de que representa una recta paralela al eje de abscisas.

3) $A = 0$ y $C = 0$. En este caso, la ecuación (XV) tiene la forma:

$$By = 0, \quad \text{ó} \quad y = 0$$

y representa el eje Ox (fórmula XII).

4) Si el coeficiente $B = 0$, la ecuación (XV) tiene la forma:

$$\boxed{Ax + C = 0} \qquad \text{(XX)}$$

Despejando la x:

$$x = -\frac{C}{A} = a,$$

llegamos a la conclusión (fórmula XIII) de que representa una recta paralela al eje de ordenadas.

Pero si en la ecuación (XX) $C = 0$, $A \neq 0$, tiene la forma:

$$Ax = 0, \quad \text{ó} \quad x = 0.$$

y representa el eje Oy (fórmula XIV).

De este modo, cualquier ecuación de primer grado respecto a las coordenadas x, y, representa una recta. En otras palabras, toda línea de primer grado es una recta.

2°. La ecuación (XV)

$$Ax+By+C=0.$$

se llama *ecuación general de la recta*. Las ecuaciones (XVIII—XX) son casos particulares.

§ 10. Ecuación de una recta en función de los segmentos

La posición de una recta respecto a los ejes de coordenadas puede ser determinada por la magnitud de los segmentos $ON=a$ y $OM=b$ (fig. 21), que la recta dada MN corta respectivamente en el eje Ox y en el eje Oy.

Según la figura 21, por semejanza de los triángulos AQN y OMN, resulta:

$$\frac{AQ}{OM}=\frac{AN}{ON},$$

o

$$\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}.$$

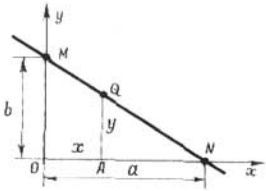


Fig. 21

Dividiendo cada miembro de $a-x$ *por* a, *se tiene:*

$$\frac{y}{b}=1-\frac{x}{a},$$

o

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1} \qquad \text{(XXI)}$$

La ecuación (XXI) se llama *ecuación de la recta en función de los segmentos.*

§ 11. Ejemplos de resolución de problemas

1°. La ecuación de la recta que corta en el eje Oy un segmento igual a 3, y que forma con el eje Ox un ángulo $\varphi=120°$.

Solución. Para obtener la ecuación de la recta dada hay que hallar los valores numéricos de los parámetros k y b e inscribirlos en la ecuación:

$$y=kx+b.$$

De la condición del problema, se deduce que

$$b = 3,$$

$$k = \operatorname{tg} 120^0 = \operatorname{tg} (180^0 - 60^0) = -\operatorname{tg} 60^0 = -\sqrt{3}.$$

Por lo tanto, la ecuación buscada es:

$$y = -x\sqrt{3} + 3.$$

2° Determinar el coeficiente angular y la ordenada inicial de la recta $2x - 3y - 6 = 0$.

Solución. 1er procedimiento. Despejando y en la ecuación dada, obtenemos la ecuación en función del coeficiente angular:

$$y = \frac{2}{3}x - 2,$$

de la cual se deduce que el coeficiente angular $k = \frac{2}{3}$, y que la ordenada inicial $b = -2$.

2º procedimiento. Aplicando las fórmulas (XVI) y (XVII), siendo $A = 2$, $B = -3$, $C = -6$, se tiene:

$$k = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3},$$

$$b = -\frac{C}{B} = -\frac{-6}{-3} = -2.$$

3º. Averiguar si entre las rectas cuyas ecuaciones son: $3x - 2y + 1 = 0$, $6x - 4y - 5 = 0$ y $2x + 3y - 7 = 0$ hay paralelas y perpendiculares entre sí.

Solución. Los coeficientes angulares de las paralelas son iguales entre sí y los de las perpendiculares son recíprocos en valor y contrarios en signo (§ 6). Aplicando la fórmula (XVI) hallamos los coeficientes angulares: de la primera recta, $k_1 = \frac{3}{2}$; de la segunda, $k_2 = \frac{3}{2}$; y de la tercera, $k_3 = -\frac{2}{3}$.

Las dos primeras rectas son paralelas porque $k_1 = k_2$; la tercera es perpendicular a las dos primeras, puesto que

$$k_3 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{k^2}.$$

4º. Hallar la ecuación de la recta que intercepta en los ejes Ox y Oy segmentos iguales a -3 y $\frac{1}{2}$ respectivamente.

S o l u c i ó n. Según los datos del problema $a = -3$ y $b = \frac{1}{2}$. Sustituyendo estos valores de a y b en la ecuación (XXI) obtenemos la ecuación buscada:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1, \text{ o } x = 6y + 3 = 0.$$

5°. ¿Cuál es la ecuación de la recta que corta en los ejes de coordenadas segmentos iguales y pasa por el punto $(-1;\ -3)$?

S o l u c i ó n. Según la condición, en la ecuación (XXI) $b = a$, y por eso la ecuación tiene la forma:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1, \quad \text{o} \quad x + y = a.$$

El punto $(-1;\ -3)$ pertenece a la recta $x + y = a$. Por ello, si sustituimos en la ecuación $x + y = a$ las coordenadas variables x, y, por las dadas -1, -3, no se altera la igualdad:

$$-1 - 3 = a.$$

De aquí que $a = -4$, y que la ecuación buscada sea:

$$x + y = -4, \text{ o } x + y + 4 = 0.$$

6°. Transformar la ecuación $3x - 4y + 2 = 0$ en una ecuación de la recta en función de los segmentos.

S o l u c i ó n. Pasemos el término independiente 2 al segundo miembro de la ecuación:

$$3x - 4y = -2,$$

y dividamos la ecuación por -2:

$$-\frac{3x}{2} + 2y = 1.$$

De donde se obtiene la ecuación de la recta en función de los segmentos:

$$\frac{x}{-\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$$

y los segmentos son

$$a = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{2}.$$

§ 12. Trazado de una recta dada su ecuación

1°. Para trazar una recta es suficiente hallar dos puntos de ella por medio de las coordenadas. De la ecuación dada se determinan con más facilidad las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con los ejes de coordenadas. Haciendo $y = 0$, en la ecuación dada se halla la abscisa del punto de intersección de ésta con el eje Ox; haciendo $x = 0$, de la ecuación dada se halla la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Oy.

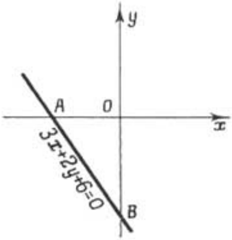


Fig. 22

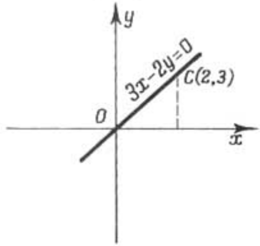


Fig. 23

E j e m p l o. Trazar la recta cuya ecuación es

$$3x + 2y + 6 = 0.$$

S o l u c i ó n. Haciendo en esta ecuación:

1) $y = 0$, obtenemos $3x + 6 = 0$, $x = -2$;

2) $x = 0$, obtenemos $2y + 6 = 0$, $y = -3$.

Hallados los puntos A $(-2;\ 0)$ y B $(0;\ -3)$ (fig. 22), y valiéndonos de una regla, trazamos por ellos la recta buscada.

2°. E j e m p l o. Trazar la recta cuya ecuación es:

$$3x - 2y = 0.$$

S o l u c i ó n. Esta ecuación de la recta no tiene término independiente, por lo cual la recta pasa por el origen de coordenadas. Dando a x un valor cualquiera diferente a cero, por ejemplo 2, y haciendo la sustitución correspondiente en la ecuación dada, se tiene:

$$3 \cdot 2 - 2y = 0;\ y = 3.$$

Hallado el punto C $(2;\ 3)$ (fig. 23), trazamos con una regla una recta CO, que pase por este punto y por el origen de coordenadas O. Esta será la recta determinada por la ecuación

$$3x - 2y = 0.$$

3°. Si la ecuación de una recta es $y = b$ o $x = a$, la construcción de la recta se reduce a trazar por el punto dado $(0; b)$ o $(a; 0)$ una recta paralela al eje Ox o Oy respectivamente.

§ 13. Punto de intersección de dos rectas

1°. En el plano pueden darse tres casos distintos de posición relativa de las rectas

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

y

$$A'x+B'y+C'=0: \tag{2}$$

1) las rectas tienen un punto común, es decir, se intersecan (fig. 24, 1),

2) las rectas no tienen ningún punto común (son paralelas) (fig. 24, 2),

3) las rectas tienen una infinidad de puntos comunes (coinciden) (fig. 24, 3).

Dadas las ecuaciones, hay que averiguar de qué caso se trata.

2°. *La ecuaciones (1) y (2) representan una misma recta si sus coeficientes son proporcionales.*

En efecto, si

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\lambda\neq 0,$$

se tiene

$$A=\lambda A',\ B=\lambda B',\ C=\lambda C'$$

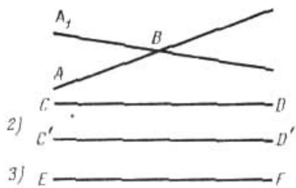


Fig. 24

y, multiplicando la ecuación (2) por $\lambda\neq 0$, se obtiene la ecuación (1). Por lo tanto las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes y por eso representan una misma recta.

3°. *Las ecuaciones (1) y (2) representan rectas paralelas siempre y solamente cuando los coeficientes de las coordenadas variables sean proporcionales.*

D e m o s t r a c i ó n. Uno de los términos independientes C o C' de las ecuaciones, por lo menos, debe ser diferente de cero, ya que las rectas $Ax + By = 0$ y $A'x +$

$+B'y=0$ coinciden, si sus coeficientes A, B, A', B', son proporcionales.

Si $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\lambda\neq 0$ entonces la ecuación (2), multiplicándola por λ, la expresaremos así:

$$\lambda A'x+\lambda B'y+\lambda C'=0, \tag{3}$$

ó

$$Ax+By+\lambda C'=0.$$

La diferencia de los primeros miembros de las ecuaciones (1) y (3) es diferente de cero, ya que $C\neq\lambda C'$. Por eso no existe ni un solo par de números (x, y) que satisfaga a ambas ecuaciones. Así pues, las rectas no tienen ningún punto común, por lo que son paralelas.

Recíprocamente, si las rectas son paralelas, sus coeficientes angulares son iguales:

$$k=-\frac{A}{B} \quad \text{y} \quad k'=-\frac{A'}{B'}$$

y, entonces, se tiene

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'},$$

es decir, los coeficientes de las coordenadas variables en las ecuaciones son proporcionales.

4°. *Las rectas*

$$Ax+By+C=0, \tag{1}$$

$$A'x+B'y+C'=0 \tag{2}$$

se cortan si

$$AB'-A'B\neq 0.$$

En efecto, multiplicando (1) por B' y (2) por B y restando del primer producto el segundo, resulta:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} AB'x+BB'y+CB'=0; \\ A'Bx+BB'y+C'B=0; \end{array} \\ \hline (AB'+A'B)\,x+(CB'-C'B)=0. \end{array} \tag{4}$$

Multiplicando (1) por A' y (2) por B y restando del segundo producto el primero, resulta:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} AA'x=A'By+A'C=0; \\ AA'x+AB'y+AC'=0; \end{array} \\ \hline (AB'-A'B)\,y+(AC'-A'C)=0. \end{array} \tag{5}$$

Las ecuaciones (4) y (5) tienen determinadas soluciones solamente si el coeficiente de las incógnitas x e y

$$AB' - A'B \neq 0. \tag{6}$$

Estas soluciones determinan un punto común de ambas rectas, es decir, el punto de intersección de las rectas (1) y (2).

Las coordenadas del punto de intersección de las rectas (1) y (2) son:

$$\boxed{x = -\frac{CB' - C'B}{AB' - A'B}, \quad y = -\frac{AC' - A'C}{AB' - A'B}} \tag{XXII}$$

5°. En el caso de que $AB' - A'B = 0$, y los términos independientes de las ecuaciones (4) y (5) ($CB' - C'B$ y y $AC' - A'C$) sean diferentes de cero, resulta:

$$AB' = A'B \quad \text{o} \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'},$$

es decir, las rectas (1) y (2) son paralelas, puesto que los coeficientes de las incógnitas x e y son proporcionales.

Si los coeficientes de las incógnitas, lo mismo que los términos independientes de las ecuaciones (4) y (5), son iguales a cero,

$$AB' - A'B = 0, \; CB' - C'B = 0, \; AC' - A'C = 0,$$

de estas igualdades se obtiene:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}; \; \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}; \; \frac{C}{C'} = \frac{A}{A'}. \text{ De donde } \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

es decir, las ecuaciones (1) y (2) representan una misma recta.

6°. Según lo expuesto, es evidente que *los diversos casos de posición relativa de dos rectas se manifiestan al resolver conjuntamente las ecuaciones de estas líneas.*

7°. **Ejercicios numéricos.** 1. Hállese el punto de intersección de las rectas

$$3x + 4y - 18 = 0 \quad \text{y} \quad 4x - 3y + 1 = 0.$$

Solución.

$$\begin{array}{l|c|c|l}
3x + 4y - 18 = 0 & 3 & 4 & + \; 9x + 12y - 54 = 0; \qquad - \; 12x + 16y - 72 = 0; \\
4x - 3y + 1 = 0 & 4 & 3 & \; 16x - 12y + 4 = 0; \qquad \; 12x - 9y + 3 = 0; \\
\hline
 & & & \; 25x - 50 = 0; \qquad\qquad\quad 25y - 75 = 0; \\
 & & & \; x = 2; \qquad\qquad\qquad\quad\; y = 3.
\end{array}$$

R e s p u e s t a. El punto de intersección de las rectas dadas es (2; 3).

2. Hallar el punto de intersección de las rectas $2x-7y=3$ y $14x-4x=1$.

S o l u c i ó n:

$$\begin{array}{r|c|l} 2x-7y=3 & 2 & \;4x-14y=6 \\ 14y-4x=1 & 1 & +\;14y-\;\;4x=1 \\ \hline & & \qquad 0=7. \end{array}$$

El sistema es incompatible. Los coeficientes de las coordenadas variables de las ecuaciones dadas son proporcionales, por lo que las rectas son paralelas.

3. Hallar el punto de intersección de las rectas:

$$x-3y+2=0 \quad y \quad 3x-9y+6=0.$$

S o l u c i ó n. Multiplicando la primera ecuación por 3 y restando del producto obtenido la segunda ecuación dada resulta:

$$0=0,$$

lo que indica que la solución es indeterminada. Las ecuaciones dadas son equivalentes y representan una misma recta, ya que sus coeficientes son proporcionales.

§ 14. Ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) en una dirección dada

1°. La recta pasa por el punto dado (x_1, y_1) y forma con el eje Ox el ángulo φ. Formemos su ecuación.

Según la condición, en la ecuación

$$y=kx+b \tag{1}$$

el parámetro $k=\operatorname{tg}\varphi$ es un número conocido. La recta (1) pasa por el punto (x_1, y_1), por lo tanto x_1, y_1 satisfacen a la ecuación (1), y sustituyendo las coordenadas variables x, y por las dadas x_1, y_1, obtenemos la igualdad

$$y_1=kx_1+b. \tag{2}$$

Puede hallarse el valor b y sustituirlo en la ecuación (1). Sin embargo, resulta más fácil eliminar la b de la ecuación (1) restando la igualdad 2) de la (1). La sustracción proporciona la ecuación de la recta que pasa por el punto dado (x_1, y_1) en la dirección dada:

$$\boxed{y-y_1=k(x-x_1)} \tag{XXIII}$$

2°. La ecuación (XXIII), en la que k puede tener una infinidad de valores, representa la *ecuación de un haz de rectas con el centro en el punto* (x_1, y_1).

3°. Ejemplo. Por el punto de intersección de las rectas:

$$2x-3y+7=0 \quad \text{y} \quad 5x+y+9=0$$

trazar una recta perpendicular a la recta $2x-y+1=0$.

Solución. "Trazar una recta" significa "formar la ecuación de una recta". En primer lugar, hallemos las coordenadas del punto de intersección de las rectas dadas, resolviendo el sistema de las ecuaciones dadas. El punto de intersección de las rectas tiene las coordenadas $(-2;\ 1)$.

Hallemos ahora el coeficiente angular k de la recta que pasa por el punto $(-2;\ 1)$ perpendicular a la recta $2x-y+1=0$. El coeficiente angular de la recta $2x-y+1=0$ es $k_1=2$, y el de la recta perpendicular a ésta, $k=-\frac{1}{2}$ (véase el § 6).

Haciendo en la ecuación (XXIII) las sustituciones $x_1=-2$, $y_1=1$ y $k=-\frac{1}{2}$, obtenemos la ecuación buscada:

$$y-1=-\frac{1}{2}(x+2) \quad \text{o} \quad x+2y=0.$$

§ 15. Ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados $(x_1,\ y_1)$ y $(x_2,\ y_2)$

1°. La recta que pasa por los puntos dados $(x_1,\ y_1)$ y $(x_2,\ y_2)$, según la fórmula (VI) tiene el coeficiente angular igual a

$$\frac{y_2-y_1}{x^2-x_1}. \tag{1}$$

Tomemos la ecuación del haz de rectas con el centro en el punto $(x_1,\ y_1)$:

$$y-y_1=k(x-x_1)$$

y demos al coeficiente angular k el valor (1). En este caso, la ecuación:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \tag{2}$$

representa la línea del haz de rectas con el centro en el punto $(x_1,\ y_1)$, que pasa por el punto $(x_2,\ y_2)$. Dividiendo la ecuación (2) por y_2-y_1, representamos la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos dados $(x_1,\ y_1)$ y $(x_2,\ y_2)$, de la siguiente forma:

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.} \tag{XXIV}$$

2°. Formar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (1; 4) y B (—3; 2).

S o l u c i ó n. Haciendo en la ecuación (XXIV) las sustituciones: $x_1 = 1, y_1 = 4, x_2 = -3, y_2 = 2$, obtenemos la ecuación buscada:

$$\frac{y-4}{2-4}=\frac{x-1}{-3-1}$$

o, multiplicando por -4,

$$2(y-4)=x-1, \quad \text{o} \quad x-2y+7=0.$$

3°. Si la recta pasa por los puntos $A(2; 3)$ y $B(-2; 3)$, formando la ecuación por medio de la fórmula (XXIV), resulta:

$$\frac{y-3}{0}=\frac{x-2}{-4}.$$

Pero es imposible la división por cero. Obsérvese que diferentes puntos de la recta AB tienen una misma ordenada, $y = 3$, por lo que la recta AB es paralela el eje Ox, y su ecuación será:

$$y=3.$$

4°. Hallar la condición según la cual tres puntos dados se encuentran un una misma recta.

S o l u c i ó n. Supongamos que los puntos dados son (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). La ecuación de la recta que pasa por los dos primeros puntos es:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Para que en esta misma recta se encuentre situado también el tercer punto, (x_3, y_3), es suficiente que sus coordenadas satisfagan a la ecuación expuesta, es decir, que se tenga la siguiente identidad:

$$\boxed{\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}}$$

§ 16. Angulo entre dos rectas

1°. *Convengamos que la frase "el ángulo entre dos rectas AB y BC" debe ser entendida como "ángulo que forma la recta BC con la AB".*

D e f i n i c i ó n. *Se considera como ángulo que forma cierta recta BC con la recta AB (fig. 25) al ángulo mínimo en el que hay que hacer girar la recta AB en torno al punto B, en sentido contrario a las agujas del reloj, para que coincida con la recta BC.*

2°. Supongamos que las rectas AB y BC tienen las ecuaciones:

$$y=k_1x+b_1 \ (AB)$$

y

$$y = k_2 x + b_2\,(BC).$$

Sea el ángulo formado por la recta AB y el eje Ox, igual a φ_1, y el formado por la recta BC y el mismo eje, igual a φ_2 (fig. 25). El ángulo formado por AB y BC lo

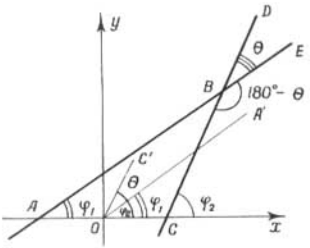


Fig. 25

designamos con Θ. Tracemos desde el origen de coordenadas O las rectas OA' y OC' paralelas respectivamente a AB y BC. Ellas forman con el eje Ox ángulos:

$$\angle xOA' = \varphi_1, \quad \angle xOC' = \varphi_2,$$

y entre sí un ángulo

$$\angle A'OC' = \angle EBD = \Theta.$$

El giro del eje Ox alrededor del origen O, en sentido contrario al de las agujas del reloj, hasta coincidir con OA', forma el ángulo φ_1, y desde OA' hasta OC', el ángulo Θ. El giro del eje Ox hasta su coincidencia con OC' forma el ángulo φ_2, o sea

$$\varphi_1 + \Theta = \varphi_2.$$

De aquí

$$\Theta = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Pero si son iguales los ángulos, también serán iguales las tangentes:

$$\operatorname{tg}\Theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$$

o sea (según la fórmula trigonométrica relativa a la tangente de la diferencia de dos ángulos)

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\cdot\operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Pero $\operatorname{tg}\varphi_1=k_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2=k_2$, y por lo tanto

$$\boxed{\operatorname{tg}\Theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}} \qquad \text{(XXV)}$$

El angulo Θ es agudo si la $\operatorname{tg}\Theta$ es positiva, y obtuso, si la $\operatorname{tg}\Theta$ es negativa; $\Theta=90^\circ$ si $1+k_1k_2=0$ y $\Theta=0$ si $k_2-k_1=0$ (§ 6).

Debe indicarse que el ángulo entre BC y AB ($\angle CBE$) es suplementario de Θ y por lo tanto es igual a $180^\circ-\Theta$. Como $\operatorname{tg}(180^\circ-\Theta)=-\operatorname{tg}\Theta$, se tiene

$$\operatorname{tg}(180^\circ-\Theta)=\frac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}.$$

En algunos casos es necesario determinar un ángulo *agudo* entre dos rectas. En este caso, el valor de la $\operatorname{tg}\Theta$ obtienido por medio de la fórmula (XXV) hay que tomarlo en su magnitud absoluta.

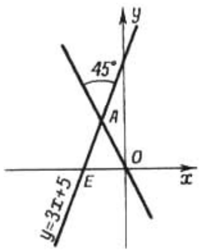


Fig. 26

3°. Ejemplos. 1. Hallar el ángulo entre las rectas: $y=2x-3$ e $y=5x+1$.

Solución. En las ecuaciones dadas se tiene

$$k_1=2,\ k_2=5.$$

Según la fórmula (XXV)

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{5-2}{1+5\cdot 2}=\frac{3}{11}=0{,}2727.$$

$$\Theta=15^\circ15'.$$

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y forma con la recta $y=3x+5$ un ángulo de 45°.

Solución. Según la condición (fig. 26) $\Theta=45^\circ$, el coeficiente angular de la recta dada es k_1, ya que para obtener un ángulo de 45° hay que hacer girar la recta *dada* en sentido contrario a las agujas de un reloj a fin de que coincida con la recta buscada: $\operatorname{tg}\Theta=\operatorname{tg}45^\circ=1$; $k_1=3$.

Sustituyendo estos valores en la fórmula (XXV) obtenemos k_2:

$$1=\frac{k_2-3}{1+3k_2};\ 1+3k_2=k_2-3;$$

$$k_2=-2.$$

La recta buscada pasa por el origen de coordenadas, por lo qu- su ecuación tiene la forma:

$$y = kx.$$

Sustituyendo k *por el valor obtenido de* k_2, se obtiene la ecuación buscada:

$$y = -2x$$

3. Conociendo los puntos $A(-7;\ -1)$, $B(2;\ -3)$ y $C(4;\ -1)$, determinar el ángulo formado por BC y AB (fig. 27).

Solución. Según la fórmula (VI), *el coeficiente angular de* BC

$$k_1 = \frac{-1+3}{4-2} = 1,$$

y el coeficiente angular de AB,

$$k_2 = \frac{-3+1}{2+7} = -\frac{2}{9}.$$

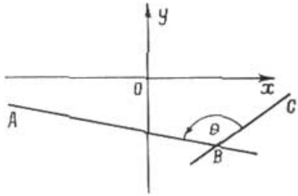


Fig. 27

Según la fórmula (XXV):

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{-\frac{2}{9}-1}{1+1\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)} = -\frac{11}{7} = -1{,}5714,$$

$$\Theta = 180° - 57°32' = 122°28'.$$

CAPITULO III

CURVAS DE SEGUNDO ORDEN

§ 17. Ecuaciones de la circunferencia

1°. Definición. *Se llama circunferencia al lugar geométrico de los puntos de un plano alejados a la misma distancia (radio) de un punto dado (centro).*

2°. La longitud del radio determina la medida de la circunferencia; la posición del centro determina la situación de la propia circunferencia en el plano. De este modo, la circunferencia viene determinada por su medida y su posición en el plano, respecto al sistema dado de coordenadas, si se conocen:

1) la longitud del radio r,

2) las coordenadas del centro O' a y b.

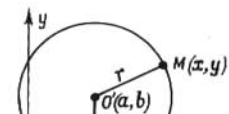


Fig. 28

De acuerdo con la definición, cualquier punto $M(x, y)$ de la circunferencia (fig. 28) se encuentra a la distancia $O'M$, igual a r, del centro O' (a, b):

$$O'M = r.$$

Expresando la distancia $O'M$ (según la fórmula II, § 3) por medio de las coordenadas de los puntos O' y M, obtendremos la ecuación:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r.$$

Haciendo desaparecer el radical en la ecuación (para esto hay que elevar los dos miembros de la ecuación al cuadrado), obtenemos la ecuación de la circunferencia:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2} \qquad \text{(XXVI)}$$

3°. Particularmente, cuando el centro O' de la circunferencia coincide con el origen de las coordenadas la ecua-

$$a=0 \text{ y } b=0,$$

ción de la circunferencia (XXVI) toma la forma:

$$\boxed{x^2+y^2=r^2} \qquad \text{(XXVII)}$$

§ 18. Ejemplos de solución de problemas

1°. Dados los valores de los parámetros a, b, y r, es suficiente sustituirlos en la ecuación (XXVI) para obtener la ecuación de la circunferencia.

Por ejemplo, la ecuación de la circunferencia de radio 5 y con el centro en el punto O' (2; —3), se expresa así:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25,$$

puesto que, según la condición, $a=2$, $b=-3$ y $r=5$.

2°. Formar la ecuación de una circunferencia en la que los puntos A (3; —2), B (—4; 5) (fig. 29) son los extremos de uno de sus diámetros.

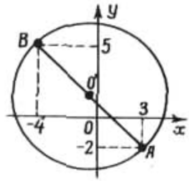


Fig. 29

Solución. El centro de la circunferencia O' es el punto medio del segmento AB. Las coordenadas del punto medio de AB (según la fórmula V, § 4) son:

$$a=\frac{3-4}{2}=-\frac{1}{2}; \quad b=\frac{-2+5}{2}=\frac{3}{2}.$$

La distancia AB es el diámetro de la circunferencia. Según la fórmula II, § 3:

$$(2r)^2=AB^2=(3+4)^2+(-2-5)^2=98.$$

De donde:

$$r^2=\frac{98}{4}.$$

Sustituyendo los valores a, b y r^2 en la fórmula (XXVI), obtenemos la ecuación buscada de la circunferencia:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{98}{4}.$$

Abriendo los paréntesis y llevando $\frac{98}{4}$ al primer miembro, tenemos:

$$x^2+x+\frac{1}{4}+y^2-3y+\frac{9}{4}-\frac{98}{4}=0,$$

$$x^2+y^2+x-3y-22=0.$$

3°. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a los ejes de coordenadas y pasa por el punto $(-2; 1)$.

S o l u c i ó n. El punto $(-2; 1)$, por el que pasa la circunferencia, está en el segundo cuadrante, y como la circunferencia es tangente a los ejes de coordenadas, se encontrará por entero en el segundo cuadrante; la abscisa a del centro es negativa, y la ordenada b, positiva.

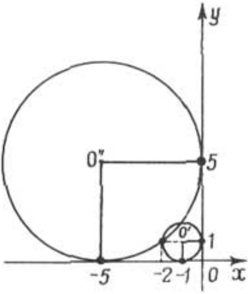


Fig. 30

Los radios trazados a los puntos de contacto (fig. 30) son perpendiculares a las tangentes (a los ejes Ox y Oy).

Por ello:

$$a=-r, \ b=r, \ (r>0).$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la circunferencia (XXVI), tenemos:

$$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2.$$

El valor de r se determina basándonos en la condición que la circunferencia pasa por el punto $(-2; 1)$ y sus coordenadas satisfacen a la ecuación expuesta. La sustitución de las coordenadas variables x, y, por las dadas -2 y 1 da lo siguiente:

$$(-2+r)^2+(1-r)^2=r^2,$$
$$r^2-6r+5=0,$$
$$r_1=1, \ r_2=5.$$

Por lo tanto, puede haber dos circunferencias que pasen por el punto $(-2; 1)$ y que sean tangentes a los ejes de coordenadas. En la primera de ellas:

$$a=-1, \ b=1, \ r=1;$$

en la segunda circunferencia:

$$a=-5, \ b=5, \ r=5.$$

La ecuación de la primera circunferencia será:

$$(x+1)^2+(y-1)^2=1, \text{ o } x^2+y^2+2x-2y+1=0.$$

La ecuación de la segunda circunferencia será:

$$(x+5)^2+(y-5)^2=25, \quad \text{o} \quad x^2+y^2+10x-10y+25=0.$$

4°. Hallar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia:

$$3x^2+3y^2-4x+6y-12=0.$$

S o l u c i ó n. Reduzcamos la ecuación dada a la forma:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \tag{1}$$

Para esto se divide la ecuación dada por el coeficiente 3 (de x^2 e y^2):

$$x^2+y^2-\frac{4}{3}x+2y-4=0.$$

Uniendo en un grupo los términos que tienen la x y en otro grupo los que tienen la y, se tiene:

$$\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)+(y^2+2y)=4,$$

$$\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{2}{3}\right)+(y^2+2\cdot y\cdot 1)=4.$$

Completemos el primero y el segundo binomio hasta formar respectivamente el cuadrado completo de la diferencia y de la suma de dos números. Para eso se añade al primer binomio $\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, y al segundo $1=1^2$. A fin de que se mantenga la igualdad en la ecuación, adicionamos también $\frac{4}{9}$ y 1 al segundo miembro de la misma.

Tendremos:

$$\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)+(y^2+2\cdot y\cdot 1+1)=4+\frac{4}{9}+1,$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2=\frac{49}{9}.$$

Comparando esta ecuación con la (1) llegamos a la conclusión de que:

$$a=\frac{2}{3},\ b=-1,\ r=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}.$$

§ 19. La circunferencia es una línea de segundo orden

1°. El grado de la ecuación de una línea, cuando la ecuación está reducida a la forma entera y racional respecto a las coordenadas x, y, se llama *orden de la línea*. La recta es una línea de primer orden, porque viene expresada por una ecuación de primer grado. La circunferencia es una línea de segundo orden. En efecto, abriendo los paréntesis en la ecuación de la circunferencia

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

y colocando los términos en orden decreciente de los exponentes respecto a las coordenadas variables x, y se tiene:

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0. \qquad (1)$$

Puede ocurrir que los parámetros a, b, r (todos o algunos) sean números quebrados. En ese caso, multiplicando (1) por el mínimo común múltiplo A, resulta:

$$Ax^2 + Ay^2 - 2aAx - 2bAy + A(a^2 + b^2 - r^2) = 0. \qquad (2)$$

Haciendo las notaciones $-2aA = D$, $-2bA = E$ y $A(a^2 + b^2 - r^2) = F$, se tiene la ecuación general de la circunferencia:

$$\boxed{Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0.} \qquad \text{(XXVIII)}$$

Esta es una ecuación de segundo grado respecto a las coordenadas x, y; por lo tanto, la circunferencia es una línea de segundo orden.

2°. Según enseña el álgebra, la ecuación general de *segundo grado con dos variables es la siguiente:*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (3)$$

La ecuación de segundo grado relativa a las coordenadas x, y, en la que los coeficientes de los cuadrados de x e y son iguales, y no tiene el término con el producto xy, representa una circunferencia.

Esta condición es necesaria. En efecto, en la ecuación general de la circunferencia (XXVIII), los coeficientes de los cuadrados de x e y son iguales y no contiene el término con el producto xy.

Esta condición es suficiente. En efecto, dividiendo la ecuación

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

por A:

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

y expresando el cociente obtenido así:

$$\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + \left(y^2 + \frac{E}{A}y\right) = -\frac{F}{A},$$

se completan $x^2 + \frac{D}{A}x$ e $y^2 + \frac{E}{A}y$ hasta los cuadrados del binomio:

$$\left(x^2 + 2\frac{D}{2A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) + \left(y^2 + 2\cdot\frac{E}{2A}y + \frac{E^2}{4A^2}\right) =$$
$$= \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A},$$

con lo que resulta:

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2},$$

es decir, se obtiene la ecuación de la circunferencia, en la que

$$\boxed{a=-\frac{D}{2A},\ b=-\frac{E}{2A},\ r^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}} \qquad \text{(XXIX)}$$

3°. Nos ocuparemos de unos casos especiales que pueden presentarse cuando los coeficientes A, D, E y F toman ciertos valores.

Ejemplo. La ecuación

$$x^2+y^2-6x+4y+13=0$$

puede representarse en la forma:

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=0,$$

o

$$(x-3)^2+(y+2)^2=0.$$

Como ninguno de los cuadrados $(x+3)^2$ e $(y+2)^2$ puede ser negativo, para que su suma sea igual a cero es necesario que:

$$x-3=0 \quad \text{e} \quad y+2=0.$$

De donde:

$$x=3 \quad \text{e} \quad y=-2.$$

A la ecuación dada satisface un solo punto del plano (3; —2) y representa una circunferencia de radio nulo, $r=0$.

Si en esta misma ecuación, en lugar del término independiente 13, tomamos por ejemplo 15, es decir, consideramos la ecuación

$$x^2+y^2-6x+4y+15=0,$$

después de reducirla a la forma normal, tenuremos:

$$(x-3)^2+(y+2)^2=-2.$$

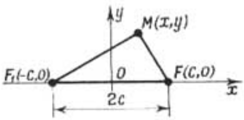
A esta ecuación no satisface ni un solo par de valores reales de las coordenadas variables, es decir, ni un solo punto del plano. Sin embargo, para generalizar se considera que en este caso la ecuación representa también una circunferencia, una circunferencia *imaginaria*, cuyo radio es

$$r=\sqrt{-2}.$$

§ 20. La elipse

1°. D e f i n i c i ó n. *Se llama elipse al lugar geométrico de los puntos de un plano, cuya suma de distancias a dos puntos dados (focos), es constante.*

Según la definición, si F y F_1 (fig. 31) son los puntos dados en el plano, llamados focos de la elipse, y M es un punto cualquiera de la elipse, la suma de las distancias MF_1 y MF es constante y se toma igual al valor $2a$, es decir,



F i g. 31

$$MF_1+MF=2a,\ (a>0).$$

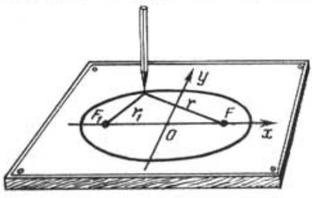
MF_1 y MF se llaman *radios vectores* del punto M. F_1F se llama *distancia focal* y se toma igual a $2c$,

$$F_1F=2c,\ (c>0).$$

En el triángulo F_1FM se ve que $MF_1+MF>F_1F$, es decir,

$$2a>2c,\ \text{ o } a>c,\ (c>0).$$

2°. Tomemos un hilo de longitud $2a$ y sujetemos sus extremos con alfileres a la distancia $2c$, entre uno y otro,



F i g. 32

en los puntos F y F_1. Estiremos el hilo con la punta de un lapicero como se indica en la figura 32, y tracemos con él una curva, manteniendo tirante el hilo mientras se mueve el lapicero sobre el papel. Por este procedimiento se describe la elipse en dos etapas: en la primera a una parte de la recta F_1F, y en la otra, a la parte opuesta.

§ 21. La ecuación de la elipse

Tomemos el punto medio de la distancia focal como origen de coordenadas O; la recta F_1F, como eje Ox, y la perpendicular a ésta, que pasa por el punto O, como eje Oy (fig. 31).

En este caso, los focos F_1 y F tienen las coordenadas $(-c;\ 0)$ y $(+c;\ 0)$.

Debido a que puede cambiar la posición del punto M en relación con los ejes de coordenadas, sus coordenadas serán las coordenadas variables $(x,\ y)$.

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (1)$$

Según la definición de la elipse

$$MF_1+MF=2a,$$

por lo que

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Eliminemos los radicales en la ecuación. Para esto se pasa uno de los radicales al segundo miembro:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

y se elevan al cuadrado los dos miembros de la igualdad obtenida.

Después de abrir los paréntesis, resulta:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+$$
$$+x^2-2cx+c^2+y^2.$$

Eliminando x^2, c^2, y^2 y pasando el radical al primer miembro, y $2cx$ al segundo, se tiene:

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx,$$

o dividiendo la ecuación por $4a$:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x. \qquad (2)$$

Elevando los dos miembros de la igualdad al cuadrado y abriendo después los paréntesis, resulta:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2} x^2.$$

Eliminando $-2cx$ y pasando $\frac{c^2}{a^2} x^2$ al primer miembro, y c^2 al segundo, se tiene:

$$x^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

Y multiplicando por a^2, resulta:

$$(a^2 - c^2) x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2).$$

Como $a > c$, se puede hacer la notación

$$\boxed{a^2 - c^2 = b^2} \qquad \text{(XXX)}$$

y la ecuación anterior se escribirá así:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Dividiendo esta igualdad por $a^2 b^2$ se obtiene la ecuación canónica de la elipse:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \text{(XXXI)}$$

§ 22. Investigación de la forma de la elipse por medio de su ecuación

1°. Resolvamos la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ respecto a y,

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

y examinemos a y como función de x. Para que los valores de y sean números reales, el radicando $a^2 - x^2$ tiene que ser positivo o igual a cero. Será así en el caso de que

$$|x| \leqslant a,$$

es decir,

$$-a \leqslant x \leqslant +a,$$

donde $a > 0$ (fig. 33).

Si $x = \pm a$, tendremos $a^2 - x^2 = 0$ e $y = 0$.

Los puntos A $(a; 0)$ y A_1 $(-a; 0)$ son los puntos de intersección de la elipse con el eje de las abscisas, y se llaman *vértices* de la elipse; la cuerda $A_1A = 2a$ se llama *eje mayor* de la elipse. Para $x = 0$, tendremos $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2} = \pm b$. Los puntos B $(0; b)$ y B_1 $(0; -b)$ son los puntos de intersección de la elipse con el eje de las ordenadas y se llaman también *vértices* de la elipse; la cuerda $B_1B = 2b$ se llama *eje menor* de la elipse.

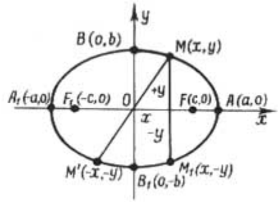


Fig. 33

A cada valor de x en el intervalo $-a < x < a$ corresponden dos puntos de la elipse, situados a uno y otro lado del eje Ox, a una distancia de éste equivalente al valor absoluto de y, porque a cada valor de x corresponden dos valores de y, iguales en valor absoluto y de signo contrario. Así pues, la elipse está situada simétricamente al eje Ox.

Al crecer la x desde $-a$ hasta cero, el valor absoluto de y crece desde cero hasta b, y al crecer x desde cero hasta a, el valor absoluto de y disminuye desde b hasta cero.

Puede resolverse la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ relativa a la x en lugar de hacerlo con respecto a la y,

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

y pueden hacerse de nuevo análogas investigaciones. En este caso llegaremos a las siguientes conclusiones: x toma valores reales únicamente al oscilar la y en el intervalo $-b \leqslant y \leqslant +b$; al aumentar la y desde $-b$ hasta cero, el valor absoluto de x crece desde cero hasta a, y al aumentar la y desde cero hasta b, el valor absoluto de x disminuye desde a hasta cero. A cada valor de y en el intervalo $-b < y < b$ corresponden dos valores de x de igual valor absoluto y signo contrario y la elipse está situada simétricamente al eje Oy.

2°. Las coordenadas variables x, y en la ecuación de la elipse están elevadas únicamente al cuadrado. Por lo tanto, si el punto (x, y) pertenece a la elipse, a ésta también le pertenecerá el punto $(-x, -y)$, porque $(-x)^2 = x^2$ y $(-y)^2 = y^2$. La cuerda que une los puntos de la elipse (x, y) y $(-x, -y)$, tiene como punto medio el origen de coordenadas O, ya que (según la fórmula V, § 4):

$$\frac{x+(-x)}{2}=0 \quad \text{e} \quad \frac{y+(-y)}{2}=0.$$

El punto que divide por la mitad a todas las cuerdas de la curva que pasan por él se llama centro de la curva. El origen de coordenadas O es el centro de la elipse.

§ 23. Construcción de la elipse

1°. Construcción por puntos (fig. 34). Se dan: $2a$ y $2c$. En una recta se señala el segmento $F_1F = 2c$, dividimos F_1F por la mitad, y del centro O, obtenido de tal modo, marcamos en la recta F_1F, a la izquierda y a la derecha, los segmentos OA_1 y OA, iguales a a, con lo que se obtiene el eje mayor A_1A. Por el centro O trazamos una recta B_1B, perpendicular a A_1A. Desde el foco F, como si fuera el centro, trazamos un arco de radio a. Dicho arco cortará la recta B_1B en los puntos B_1 y B. El segmento $B_1B = 2b$ es el eje menor de la elipse, puesto que en el triángulo OFB resulta que $OB^2 = FB^2 - OF^2 = a^2 - c^2 = b^2$ (fórmula XXX). De este modo hemos encontrado cuatro puntos, que son los vértices de la elipse: A_1, A, B_1 y B.

Fig. 34

Para hallar los demás puntos de la elipse se toma en el segmento F_1F, a la izquierda del centro (o a la derecha de éste), un punto cualquiera C_1 y se trazan desde los focos F y F_1, como si fueran centros, arcos pequeños (cada vez, uno de ellos más arriba de la recta A_1A, y otro más abajo de ésta), al principio con un radio igual a A_1C_1, y luego, con un radio igual a C_1A.

La intersección de estos arcos nos da cuatro puntos (en la figura todos ellos están señalados con la cifra 1).

Los puntos 1 pertenecen a la elipse porque la suma de las distancias de cada uno de éstos hasta los focos, es igual a $2a$:

$$1F_1 + 1F = A_1C_1 + C_1A = A_1A = 2a.$$

Tomando en el segmento OF_1 (u OF) otros puntos C_2, C_3 ... y repitiendo las operaciones hechas en el caso del punto C_1, cada vez se obtienen cuatro puntos de la elipse (en la figura están señalados con las cifras 2, 3, etc.).

Después de determinar por tal procedimiento un número suficiente de puntos, trazamos — siguiendo estos puntos a mano o por medio de una plantilla — una curva continua, es decir, una elipse.

Al construir la elipse es necesario tomar más puntos en el segmento F_1O cerca del foco F_1 que del centro O, y concentrar los puntos C_1, C_2, C_3 ... en la medida en que se van acercando a F_1.

2°. Si se dan los semiejes a y b, hay que empezar por encontrar c. Para esto es suficiente trazar un triángulo rectángulo con la hipotenusa igual al semieje mayor a y con un cateto igual al semieje menor b; el otro cateto será igual a c (fórmula XXX).

§ 24. Interrelación de la elipse y la circunferencia

1°. Si en la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hacemos $b = a$, se obtendrá:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ o } x^2 + y^2 = a^2,$$

es decir, la ecuación de una circunferencia de radio a. Así pues la circunferencia es una elipse con semijes iguales.

2°. Tracemos (fig. 35) del centro O de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ una circunferencia de radio igual al semieje mayor a; su ecuación será: $x^2 + y^2 = a^2$. Resolviendo las ecuaciones de la elipse y de la circunferencia respecto a y, y distinguiendo las ordenadas de los puntos de la elipse y de la circunferencia, que tienen la misma abscisa x, se señala la ordenada del punto de la elipse por medio de y_e, y la de la circunferencia, por medio de y_c. Se tiene:

$$y_{\text{e}} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$y_{\text{c}} = \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Dividiendo la primera ecuación por la segunda, resulta:

$$\frac{y_{\text{e}}}{y_{\text{c}}} = \frac{b}{a},$$

es decir, *si tomando el eje mayor de la elipse como diámetro, se traza una circunferencia, tendremos que para cada valor de la abscisa x, la razón de las ordenadas de los puntos correspondientes de la elipse y de la circunferencia será constante e igual a la razón del semieje menor de la elipse respecto a su semieje mayor.*

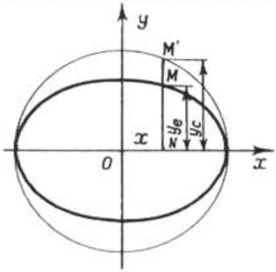


Fig. 35

De aquí se deduce que la elipse se obtiene por medio de la "compresión uniforme" de una circunferencia de radio a, es decir, al diminuir todas las semicuerdas perpendiculares a su diámetro, en la razón constante $\frac{b}{a}$. La razón $\frac{b}{a}$, se llama coeficiente de compresión.

3°. Supongamos que el plano Q de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ forma con el plano P (fig. 36) el ángulo φ. Bajando de cada punto M de la circunferencia dada una perpendicular al plano P, se obtiene la proyección ortogonal de la circunferencia en el plano P. De la figura 36 se deduce que si $MM' \perp P$ y $MN \perp Ox$, será $\angle M'NM = \varphi$. Del triángulo rectángulo $M'NM$ tenemos:

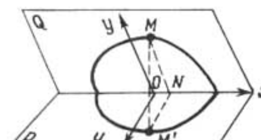


Fig. 36

$$\frac{M'N}{MN} = \cos\varphi,$$

es decir, todas las semicuerdas de la circunferencia, perpendiculares al diámetro Ox, aparecen en el plano P reducidas a una misma proporción, igual a $\cos\varphi$. En consecuencia, *la proyección ortogonal de una circunferencia en el plano P, es una elipse.*

§ 25. Excentricidad de la elipse

1°. La magnitud de la razón de la distancia focal respecto a la longitud del eje mayor de la elipse se llama *excentricidad de la elipse* y se indica con la letra e:

$$\boxed{e=\frac{c}{a}} \qquad \text{(XXXII)}$$

Como $c<a$, se tiene que $e<1$,

Conociendo los semiejes a y b de la elipse, hallemos su excentricidad. De la fórmula (XXX)

$$c^2=a^2-b^2,\ c=\sqrt{a^2-b^2},\quad (c>0).$$

Sustituyendo el valor de c en la fórmula (XXXII), resulta:

$$\boxed{e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} \ \text{(XXXIII)} \ \text{o} \ \boxed{e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}.} \ \text{(XXXIIIa)}$$

De esta fórmula se deduce: si $b=a$, es decir, si la elipse representa una circunferencia, la excentricidad $e=0$; si a es invariable y b disminuye desde a hasta 0, la excentricidad de la elipse aumenta desde cero hasta la unidad; la excentricidad es igual a la unidad cuando la elipse se transforma en un segmento de la recta A_1A.

2°. En el proceso de obtención de la ecuación de la elipse (§ 21) se ha establecido la igualdad (2):

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x.$$

En ella, $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=MF$ (igualdad (1), § 21), es decir, es el radio vector del punto M. Lo indicaremos con r. Como $\frac{c}{a}=e$, se tiene

$$\boxed{r=a-ex}$$

Indicando el segundo radio vector del punto M con r_1 $MF_1=r_1$, se obtiene:

$$\boxed{r_1=a+ex,}$$

puesto que $r+r_1=2a$.

§ 26. Hipérbola

D e f i n i c i ó n. *Se llama hipérbola el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos dados (focos), es constante.*

Según la definición, si F_1 y F (fig. 37) son los puntos dados en el plano, llamados focos de la hipérbola, y M es cualquier punto de la hipérbola, la diferencia de las distancias MF_1 y MF (siendo $MF_1 > MF$, o bien $MF_1 < MF$) es constante y se le asigna el valor $2a$,

$$|MF_1 - MF| = 2a, \qquad (a > 0).$$

MF_1 y MF se llaman *radios focales vectores* del punto M. F_1F se llama *distancia focal* y se toma igual a $2c$.

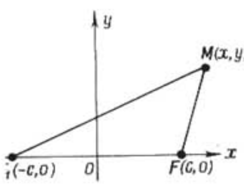
$$F_1F = 2c.$$

Del triángulo F_1MF se deduce que:

$$|MF_1 - MF| < F_1F, \text{ es decir, } 2a < 2c, \text{ o } a < c.$$

§ 27. Ecuación de la hipérbola

Tomemos el punto medio de la distancia focal (fig. 37) como origen de coordenadas O; la recta F_1F como eje Ox y la perpendicular a éste, que pasa por el punto O, como eje Oy. Los focos F_1 y F tienen las coordenadas $(-c, 0)$ y $(+c, 0)$. El punto M tiene las coordenadas variables (x, y).



F i g. 37

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \qquad (1)$$

Según la defínción de la hipérbola

$$|MF_1 - MF| = 2a,$$

por ello

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

De aquí que:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Elevando ambos miembros de la ecuación al cuadrado y simplificando, se obtiene:

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Dividiendo cada término por $4a$, resulta:

$$\frac{c}{a}x - a = \pm\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Elevando los dos miembros de la ecuación (2) al cuadrado y simplificando, se tiene:

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2\,(c^2 - a^2).$$

Como $c > a$, puede suponerse que:

$$\boxed{c^2 - a^2 = b^2} \tag{XXXIV}$$

y la ecuación anterior se expresa así:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividiendo esta igualdad por a^2b^2 se obtiene la ecua ción canónica de la hipérbola:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{XXXV}$$

§ 28. Investigación de la forma de la hipérbola según su ecuación

1°. Resolvamos la ecuación de la hipérbola (XXXV) referida a y.

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{1}$$

Los valores de y son números reales, si $x^2 - a^2 \geqslant 0$ o sea, si $|x| \geqslant a$.

Si $-a < x < +a$, a los valores de x corresponden valores imaginarios de y; por ello, si trazamos las rectas $x = -a$ y $x = a$ (fig. 38), en la franja infinita comprendida entre estas rectas no hay puntos de la hipérbola. Así pues, la hipérbola no se corta con el eje Oy.

Si $x = \pm a$, tendremos $x^2 - a^2 = 0$ e $y = 0$. Los puntos $A\ (a, 0)$ y $A_1(-a, 0)$ son los puntos de intersección de la hipérbola con el eje de las abscisas y se llaman *vértices* de la hipérbola. La cuerda $A_1A = 2a$ se llama *eje real* de la hipérbola.

A cada valor de x en los intervalos $-\infty < x < -a$ y $+a < x < \infty$ corresponden dos puntos de la hipérbola situados a uno y otro lado del eje Ox. a una distancia de éste igual al valor absoluto de y, porque a cada valor de x, en estos intervalos, corresponden dos valores de y, de igual valor absoluto y signo contrario. La hipérbola es una curva, simétrica respecto al eje Ox.

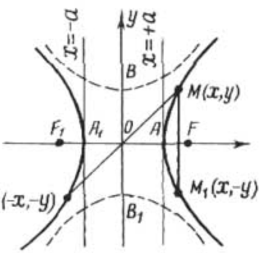


Fig. 38

Al crecer x desde a hasta $+\infty$, el valor absoluto de y crece de 0 hasta el infinito. Al disminuir x desde $-a$ hasta $-\infty$, el valor absoluto de y crece también, y al mismo tiempo toma sucesivamente los mismos valores que al aumentar x desde a hasta $+\infty$, puesto que en la ecuación (1) x está elevada solamente al cuadrado y debido a esto, $\sqrt{(-x)^2-a^2} = \sqrt{(+x)^2-a^2}$, $(|x| \geqslant a)$. Así pues la hipérbola está formada por dos ramas de igual forma, simétricas respecto a los ejes Ox y Oy, situadas una a la derecha de la recta $x = a$, y la otra a la izquierda de la recta $x = -a$, y ambas se prolongan indefinidamente.

Hacia arriba y hacia abajo del origen O marcamos en el eje Oy segmentos de magnitud b. Por la fórmula (XXXIV) se ve que el segmento de longitud b es un cateto del triángulo rectángulo, en el cual la hipotenusa es igual a c, y el otro cateto es igual a a. El segmento $B_1B = 2b$ se llama *eje imaginario* de la hipérbola. Los puntos B_1 y B se llaman *vértices imaginarios* de la hipérbola.

2°. Puesto que en la ecuación de la hipérbola (XXXV) las coordenadas variables x, y figuran elevadas solamente al cuadrado, si el punto (x, y) pertenece a la hipérbola, a ésta también le pertenece el punto $(-x, -y)$, que es simétrico respecto al origen de coordenadas O. Por ello, *el origen de coordenadas O, es el centro de la hipérbola.*

3°. Si se toma como eje real el segmento $B_1B = 2b$, y como eje imaginario el segmento $A_1A = 2a$, la ecuación de la hipérbola adopta la forma:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ o } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

y la propia hipérbola toma la forma representada en la figura 38 en líneas de trazos.

Las dos hipérbolas cuyas ecuaciones son:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ y } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

se llaman conjugadas.

§ 29. Construcción de la hipérbola

1°. Por medio de un movimiento continuo (fig. 39). Se dan $2a$ y $2c$. Se toma una regla y en su extremo se fija un hilo. El otro extremo de la regla y el del hilo los sujetamos con cierta holgura para que puedan girar (con alfileres, por ejemplo) en los focos F_1 y F respectivamente. El hilo debe ser tan largo que la diferencia entre la longitud de la regla (F_1N) y la del hilo (FMN) sea igual a $2a$. Con la punta de un lapicero se estira el hilo de tal modo que la regla coincida con la recta F_1F; entonces, la punta del lapicero se hallará en el vértice A de la hipérbola. Después trazamos una curva, manteniendo el hilo tirante mientras se mueve el lapicero sobre el papel. Por este procedimiento se traza una rama de la hipérbola en dos etapas: al principio a un lado de la recta F_1F, y después, al otro.

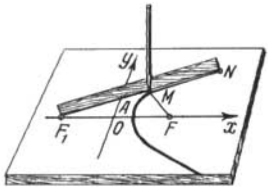


Fig. 39

Para trazar la otra rama de la hipérbola hace falta pasar el centro de rotación de la regla, del foco F_1 al foco F, y el extremo libre del hilo se ajusta en el foco F_1.

2°. Construcción por puntos (fig. 40). Se dan $2a$ y $2c$. En una recta se marca el segmento $F_1F = 2c$ y se divide por la mitad. A la izquierda y a la derecha del centro O, obtenido de este modo, marcamos en la recta F_1F dos segmentos OA_1 y OA, iguales a a. Estos formarán el eje real A_1A de la hipérbola.

En la prolongación del eje real tomamos a la derecha del foco F (o a la izquierda del foco F_1) una serie de puntos C_1, C_2, C_3, ... Se traza desde los focos F y F_1, como si fueran centros, arcos pequeños (cada vez, uno de ellos más arriba de la recta A_1A, y otro más abajo de ésta) al principio con un radio igual a A_1C_1 y después con un radio igual a C_1A. La intersección de estos arcos nos da cuatro puntos de la hipérbola (en la figura todos ellos están señalados con la cifra 1).

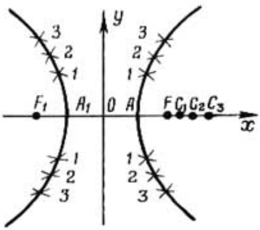


Fig. 40

Los puntos 1 pertenecen a la hipérbola porque la diferencia de los radios vectores de cada uno de éstos es igual a $2a$:

$$|1F_1 - 1F| = |A_1C_1 - C_1A| = \\ = A_1A = 2a.$$

Repitiendo para los puntos C_2, C_3, ... respectivamente las mismas operaciones que en el caso del punto C_1, cada vez se obtendrán cuatro puntos de la hipérbola (en la figura están señalados con las cifras 2, 3, ...).

Después de determinar por medio de tal procedimiento el número suficiente de puntos de la hipérbola, se traza siguiendo estos puntos, a mano o con una plantilla, una curva continua.

3°. Si se dan los semiejes de la hipérbola a y b, hay que empezar por encontrar c. Para esto es suficiente construir un triángulo rectángulo, cuyos catetos sean iguales a los semiejes a y b; la hipotenusa de este triángulo será igual a c, porque en la fórmula (XXXIV) resulta que $a^2+b^2 = c^2$.

§ 30. Asíntotas de la hipérbola

Estudiemos la posición recíproca de la recta (fig. 41)

$$y = \frac{b}{a}x \tag{1}$$

y de la rama derecha de la hipérbola en el primer cuadrante. Representemos la ecuación de la hipérbola (XXXV) del siguiente modo:

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{2}$$

Se entiende por x una abscisa elegida arbitrariamente en el intervalo $a < x < +\infty$. Sustituyendo este número x en la ecuación de la recta (1) y en la ecuación de la rama de la hipérbola (2), encontramos el valor de la ordenada del punto, cuya abscisa es igual a x, situado en la recta (1) y en la hipérbola (2). Indiquemos a éstas con y_a e y_h respectivamente, es decir,

$$y_a = \frac{b}{a} x,$$

$$y_h = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Como $a^2 > 0$, $x > \sqrt{x^2 - a^2}$ e $y_a > y_h$.

La diferencia de las ordenadas es

$$y_a - y_h = \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

o

$$y_a - y_h = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})}{a}.$$

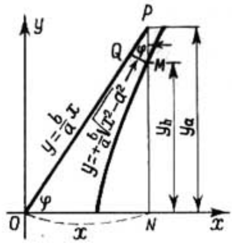


Fig. 41

Racionalizando el numerador del quebrado, se tiene:

$$y_a - y_h = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} =$$

$$= \frac{b(x^2 - x^2 + a^2)}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

El numerador ab del quebrado obtenido es un número constante; la magnitud del denominador $x + \sqrt{x^2 - a^2}$ depende del valor de x, y aumenta al crecer x. En consecuencia, la diferencia $y_a - y_h$ disminuye al crecer el valor de x. Al aumentar indefinidamente el valor de x, la diferencia $y_a - y_h$ tiende a cero.

Supongamos que al valor elegido de x corresponde en la recta el punto P, y en la hipérbola, el punto M. La diferencia $y_a - y_h = MP$. Bajemos del punto M una perpendicular MQ, a la recta OP. En el triángulo rectángulo MQP $\angle PMQ = \angle xOP = \varphi$,

$$MQ = MP \cdot \cos\varphi.$$

Como $\cos\varphi$ es un número constante y $MP = y_a - y_h$ tiende a cero cuando x crece indefinidamente, también MQ tiende a cero al aumentar x ilimitadamente.

Se llama *asíntota de la curva* a la recta que posee la propiedad de que la longitud de la perpendicular, bajada a la recta desde un punto de la curva, tiende a cero cuando el punto se aleja indefinidamente por la rama infinita de la curva. Por lo tanto, la recta $y = \frac{b}{a}x$ es la asíntota de la rama derecha de la hipérbola. Esta es asimismo la asíntota de la rama izquierda de la hipérbola.

La recta $y = -\frac{b}{a}x$ es también asíntota, tanto de la rama derecha como de la rama izquierda de la hipérbola. Esto se debe a la simetría de la hipérbola respecto a los ejes de coordenadas.

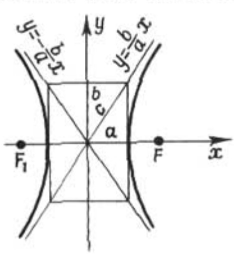


Fig. 42

Por lo tanto, la hipérbola tiene dos asíntotas:

$$\boxed{y = \pm \frac{b}{a}x} \qquad \text{(XXXVI)}$$

Para trazar las asíntotas de una hipérbola es suficiente construir un rectángulo, cuyos ejes de simetría sean los ejes de la hipérbola, y trazar sus diagonales (fig. 42). Como las ecuaciones de estas diagonales son $y = \pm\frac{b}{a}x$, prolongándolas indefinidamente obtenemos las asíntotas de la hipérbola.

La rama derecha y la izquierda de la hipérbola se encuentran dentro de los ángulos que forman las asíntotas $y = +\frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ en su intersección, y prolongadas indefinidamente se acercan a dichas asíntotas.

La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, que es conjugada a la dada, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, tiene las mismas asíntotas que ella.

§ 31. Excentricidad de la hipérbola

1°. El valor de la razón de la distancia focal $2c$ respecto al eje real $2a$ de la hipérbola se llama su excentricidad y se señala con la letra e,

$$e = \frac{c}{a},$$

Puesto que $c > a$, $e > 1$.

De la fórmula (XXXIV) resulta que $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Sustituyendo este valor de c en la fórmula de la excentricidad, se tiene:

$$\boxed{e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}} \text{ (XXXVII) ó } \boxed{e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}} \text{ (XXXVIIa)}$$

Según esta fórmula resulta que manteniendo invariable la longitud del eje real $2a$ y disminuyendo la longitud del eje imaginario $2b$, la excentricidad de la hipérbola se aproximará a 1. Por otro lado, cuanto menor sea b, tanto menor será el ángulo formado por las asíntotas (la razón $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ y tanto más aplastada estará la hipérbola en dirección vertical (fig. 43).

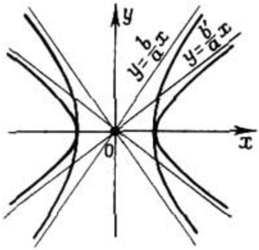


Fig. 43

2°. Al obtener la ecuación de la hipérbola (§ 27) se ha encontrado la igualdad (2):

$$\frac{c}{a} x - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

En ésta, $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = MF$, es decir, representa al radio vector del punto M de la hipérbola. Designémoslo con la letra r; la razón $\frac{c}{a} = e$.

La igualdad se puede escribir así:

$$\boxed{r = ex - a}$$

Designando el segundo radio vector con r_1, $MF_1 = r_1$, se tiene:

$$\boxed{r_1 = ex + a}$$

Los valores de r y r_1 obtenidos por medio de estas fórmulas serán positivos si los valores de x son positivos, y negativos, si los valores de x son también negativos. Como r y r_1 representan las *longitudes* de los radios vectores, las expresiones numéricas de éstos tienen que ser positivas. Por lo tanto, al determinar las r y r_1 de los puntos de una hipérbola, con abscisas negativas, hay que tomar el segundo miembro de las fórmulas de r y r_1 en su valor absoluto.

§ 32. La hipérbola equilátera

La hipérbola se llama e q u i l á t e r a si tiene iguales sus semiejes, es decir, si $b = a$.

Sustituyendo en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 b$ por a, se obtiene la ecuación de la hipérbola equilátera:

$$\boxed{x^2 - y^2 = a^2} \qquad \text{(XXXVIII)}$$

Poniendo $b = a$ en las ecuaciones de las asíntotas (XXXVI), se hallan las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola equilátera:

$$y = x \text{ e } y = -x.$$

Las asíntotas de la hipérbola equilátera son las bisectrices de los ángulos del sistema de coordenadas y, por lo tanto, son perpendiculares entre sí, porque si $\operatorname{tg} \varphi = \pm 1$, se tiene $\varphi = 45°$ y $135°$. La excentricidad de cualquier hipérbola equilátera es un número constante,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}.$$

§ 33. Fórmulas de transformación de las coordenadas

1°. C a s o d e t r a s l a d o p a r a l e l o d e l o s e j e s d e c o o r d e n a d a s.

Se tienen dos sistemas de coordenadas xOy y $x'O'y'$ (fig. 44), y el origen del segundo sistema O' tiene, respecto a los ejes del primer sistema, las coordenadas (a, b), y las direcciones de los ejes de ambos sistemas son iguales, es decir, el eje $O'x'$ es paralelo al eje Ox y el eje $O'y'$ es paralelo al eje Oy, y las direcciones positivas de los ejes semejantes son iguales. Conociendo las coordenadas del punto M respecto a un sistema se pueden encontrar las coordenadas de este punto respecto al otro sistema.

En efecto, si (x', y') son las coordenadas del punto M respecto al sistema $x'O'y'$ y (x, y) respecto al sistema xOy, tendremos que según la figura 44 y en virtud de la regla del § 3, 3°:

$$\boxed{x' = x - a; \quad y' = y - b} \qquad \text{(XXXIX)}$$

2°. Caso de rotación de los ejes de coordenadas.

Supongamos que el punto M (fig. 45) en el sistema de coordenadas xOy tiene la abscisa $x = ON$ y la ordenada $y = NM$. Hagamos girar el sistema de coordenadas xOy alrededor del origen O de tal manera que la nueva direc*ción del eje de las abscisas Ox' forme con la dirección*

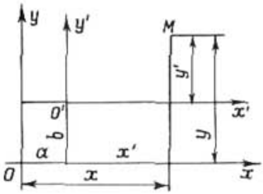


Fig. 44

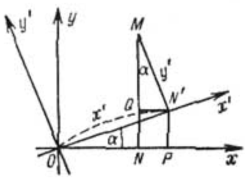


Fig. 45

anterior de Ox el ángulo α. El ángulo α se llama ángulo de rotación; su valor es positivo si la rotación del eje Ox *se efectúa en dirección* contraria a la de las aguajas de un reloj, y es negativo si la rotación del eje Ox se efectúa en la misma dirección de las agujas del reloj.

Indiquemos por medio de x' e y' las coordenadas del punto M respecto a los nuevos ejes ($x' = ON'$, $y' = N'M$) y expresemos las coordenadas primitivas x, y mediante las nuevas x', y', del siguiente modo:

según la figura 45

$$x = ON = OP - NP = OP - QN',$$

$$y = NM = NQ + QM = PN' + QM;$$

en el triángulo OPN'

$$OP = x' \cdot \cos\alpha, \qquad PN' = x' \cdot \operatorname{sen}\alpha;$$

en el triángulo $QN'M$

$$QN' = y' \cdot \operatorname{sen}\alpha, \qquad QM = y' \cdot \cos\alpha;$$

de donde

$$\boxed{x = x' \cos\alpha - y' \cdot \operatorname{sen}\alpha; \quad y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cdot \cos\alpha} \quad \text{(XL)}$$

§ 34. Ecuación de una hipérbola equilátera referida a las asíntotas

La ecuación de la hipérbola equilátera en el sistema xOy (fig. 46) es:

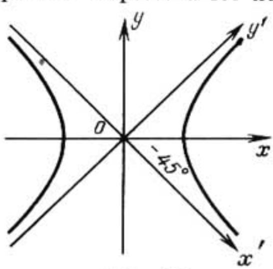
$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Hacemos girar el sistema de coordenadas xOy alrededor del origen O, como centro, en un ángulo $\alpha = -45°$. Entonces, los nuevos ejes de coordenadas Ox' y Oy' serán respectivamente la asíntota $y = -x$ y la asíntota $y = +x$. Según la fórmula (XL), para cada punto de la hipérbola equilátera dada, tenemos:

$$x = x' \cdot \cos(-45°) - y' \cdot \operatorname{sen}(-45°) = \\ = x' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}},$$

$$y = x' \cdot \operatorname{sen}(-45°) + y' \cdot \cos(-45°) = \\ = -x' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + y' \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{y' - x'}{\sqrt{2}},$$

donde x', y' son las coordenadas del punto (x, y) de la hipérbola respecto a los nuevos ejes. Sustituyendo estos valores de x e y en la ecuación $x^2 - y^2 = a^2$, tenemos:



F i g. 46

$$\frac{(x' + y')^2}{2} - \frac{(y' - x')^2}{2} = a^2.$$

De aquí se obtiene:

$$4x'y' = 2a^2,$$

$$\boxed{x'y' = \frac{a^2}{2}} \qquad \text{(XLI)}$$

Esta es la ecuación de la hipérbola equilátera cuando las asíntotas hacen de ejes de coordenadas.

Representando $\frac{a^2}{2}$ por medio de k y omitiendo los rasgos de las coordenadas variables x', y', a la ecuación obtenida se da la forma:

$$xy = k.$$

Se ve pues que la hipérbola equilátera, cuya ecuación está referida a las asíntotas, representa la gráfica de la función inversamente proporcional.

§ 35. Ejemplos de resolución de problemas sobre la elipse y la hipérbola

1°. Formar la ecuación de la elipse, siendo el eje mayor igual a 10 y la excentricidad $\varepsilon = 0{,}8$.

S o l u c i ó n. Para formar la ecuación de la elipse hace falta tener los valores de los semiejes a y b. Se sabe que:

$$2a = 10 \text{ y } \varepsilon = \frac{c}{a} = 0{,}8.$$

De donde $a = 5$, $c = 0{,}8 \cdot a = 4$.

Por la fórmula $b^2 = a^2 - c^2$ encontramos b^2

$$b^2 = 5^2 - 4^2 = 9.$$

Sustituyendo en la ecuación (XXXI) a^2 y b^2 por los números 25 y 9, obtenemos la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \text{ o } 9x^2 + 25y^2 = 225.$$

2°. Formar la ecuación de la hipérbola que tiene como asíntotas las rectas $y = \pm \frac{3}{5} x$ y pasa por el punto $(-5; 2)$.

S o l u c i ó n. Comparando las ecuaciones dadas de las asíntotas con $y = \pm \frac{b}{a} x$, deducimos que la razón $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$.

La hipérbola pasa por el punto $(-5; 2)$, por ello, sustituyendo en la ecuación de la hipérbola (XXXV) las coordenadas variables por las dadas, obtenemos la igualdad $\frac{25}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$. Resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{5} \text{ y } \frac{25}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1.$$

Resolvemos este sistema respecto a a y b del siguiente modo: de la primera ecuación hallamos que $\frac{1}{a} = \frac{3}{5b}$, y, sustituyendo en la segunda, obtenemos: $\frac{9}{b^2} - \frac{4}{b^2} = 1$. De donde $b^2 = 5$. Sustituyendo en la segunda ecuación b^2 por el número 5, $\frac{25}{a^2} - \frac{4}{5} = 1$, hallamos que $a^2 = \frac{125}{9}$. Los valores obtenidos de a^2 y b^2 los sustituimos en (XXXV) y resulta la ecuación buscada de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{\frac{125}{9}}-\frac{y^2}{5}=1, \text{ o sea } 9x^2-25y^2=125.$$

3°. Hallar por medio de la ecuación de la elipse $5x^2+9y^2=$ $=180$ sus ejes y su excentricidad.

S o l u c i ó n. Reduzcamos la ecuación dada a la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Para eso la dividimos por 180:

$$\frac{5x^2}{180}+\frac{9y^2}{180}=1, \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$$

De donde:

$$a=6, \quad b=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

La excentricidad:

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{36-20}}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

R e s u l t a d o: Los ejes: 12 y $4\sqrt{5}$, la excentricidad: $\frac{2}{3}$.

4°. Escribir la ecuación de una hipérbola equilátera, sabiendo que sus asíntotas son respectivamente paralelas a los ejes de coordenadas; dicha hipérbola pasa por el punto (2; 3), y su centro se encuentra en el punto (1; —1).

S o l u c i ó n. Designemos el sistema de coordenadas en que son dados los puntos (2; 3) y (1; —1), por xOy. Realicemos una translación del eje xOy, al nuevo origen de coordenadas (1; —1), que es centro de la hipérbola y también el punto de intersección de las asíntotas, y designemos al nuevo sistema por $x'O'y'$. En el sistema $x'O'y'$ la ecuación de la hipérbola equilátera será

$$x'y'=k. \tag{*}$$

De acuerdo con las fórmulas (XXXIX) tenemos:

$$x'=x-1, \quad y'=y+1.$$

Insertando estos valores x' e y' en la ecuación (*), resulta la ecuación de la hipérbola dada en el sistema xOy:

$$(x-1)(y+1)=k. \tag{**}$$

Ya que el punto (2; 3) pertenece a la hipérbola, sustituyendo los valores de sus coordenadas en la ecuación (**), resulta la igualdad

$$(2-1)\cdot(3+1)=k.$$

De aquí $k=4$ y la ecuación buscada de la hipérbola es

$$(x-1)(x+1)=4,$$

$$y+1=\frac{4}{x-1}, \quad \text{o} \quad y=\frac{5-x}{x-1}.$$

5°. Demostrar que la gráfica de la función lineal general $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde $c \neq 0$, es una hipérbola equilátera.

S o l u c i ó n. Separemos la parte entera de la fracción, dividiendo $ax+b$ entre $cx+d$, por la regla de división de polinomios, y entonces obtenemos como cociente $\frac{a}{c}$, y como resto $b-\frac{ad}{c}=\frac{bc-ad}{c}$. Después de esto escribiremos la ecuación en la forma

$$y=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}:(cx+d),$$

$$y-\frac{a}{c}=\frac{bc-ad}{c}:(cx+d)=\frac{bc-ad}{c^2}:\left(x+\frac{d}{c}\right),$$

$$\left(x+\frac{d}{c}\right)\cdot\left(y-\frac{a}{c}\right)=\frac{bc-ad}{c^2}.$$

Si suponemos que

$$x+\frac{d}{c}=x', \quad y-\frac{a}{c}=y' \quad \text{y} \quad \frac{bc-ad}{c^2}=k,$$

resulta la ecuación de la hipérbola equilátera:

$$x'y'=k$$

en el nuevo sistema de coordenadas $x'O'y'$ que se obtiene por la traslación del sistema xOy al nuevo origen $O'\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

§ 36. Parábola

D e f i n i c i ó n. *Se llama parábola el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto dado (foco) y de una recta dada (directriz).*

Según la definición, si F es el punto dado, llamado foco de la parábola (fig. 47), KL es la recta dada, denominada directriz de la parábola, M es cualquier punto de la parábola y MN, la perpendicular bajada del punto M a la recta KL, se tiene que

$$MF=MN.$$

§ 37. Ecuación de la parábola

1°. Admitamos como eje Ox (fig. 47) la recta que pasa por el foco F, perpendicular a la directriz KL, y como origen de coordenadas, el punto O, es decir, el punto medio de la distancia, AF del foco F a la directriz KL.

Supongamos que la dirección de A a F coincide con la dirección positiva del eje Ox. Tomemos

$$AF = p, \quad p > 0.$$

Al elegir estos ejes, el foco F tendrá las coordenadas $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, el punto $M(x, y)$ y el punto $N\left(-\frac{p}{2}, y\right)$.

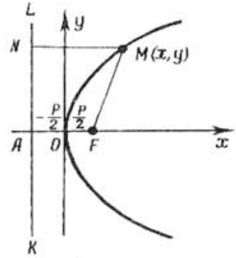


Fig. 47

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Puesto que $MF = MN$:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

De donde:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Eliminando x^2 y $\frac{p^2}{4}$ y pasando $-px$ al segundo miembro de la igualdad, obtenemos la ecuación canónica de la parábola:

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad \text{(XLII)}$$

El número p se llama *parámetro de la parábola.*

2°. La distancia desde el punto M al foco F se llama *radio vector* del punto M. Indicando el radio vector del punto M con r, se obtiene:

$$r = x + \frac{p}{2},$$

ya que $r = MF$, y $MF = MN = x + \frac{p}{2}$.

§ 38. Investigación de la forma de la parábola por medio de su ecuación

1°. De la fórmula de la parábola (XLII) se tiene que:

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Puesto que se ha tomado por p un número positivo, los valores de y pueden ser reales solamente si $x \geqslant 0$. Si $x = 0$, se tiene $y = \pm \sqrt{2p \cdot 0} = 0$. El origen de coordenadas $O\ (0, 0)$ pertenece a la parábola y se llama *vértice* de la misma. $y^2 = 2px$ es la *ecuación de la parábola referida al vértice.*

A cada valor de x en el intervalo $0 < x < +\infty$ corresponden dos puntos de la parábola, situados a ambos lados del eje Ox, alejados de ésta a una distancia igual al valor absoluto de y, puesto que a cada valor de x en este intervalo corresponden dos valores de y, de igual valor absoluto y de signo contrario. La parábola es una línea curva, simétrica al eje Ox. El eje Ox se llama *eje de la parábola.*

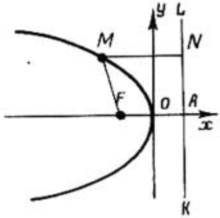


Fig. 48

Al aumentar x desde 0 hasta $+\infty$, los valores de y crecen en valor absoluto desde 0 hasta ∞. La parábola es una curva abierta e ilimitada. La parábola tiene la forma representada en la figura 47.

2°. La distancia desde el vértice de la parábola O hasta su foco F se llama *distancia focal de la parábola*. La distancia focal de la parábola $OF = \frac{p}{2}$.

La directriz de la parábola es perpendicular a su eje; la ecuación de la directriz de la parábola es: $x = -\frac{p}{2}$.

3°. Si la dirección de A a F (fig. 48) es contraria a la dirección positiva del eje Ox,

$$AF = p, \text{ y, además, } p < 0,$$

la expresión algebraica de las coordenadas de los puntos F, M y N será la misma que en el primer caso (1°), y, por eso, la ecuación de la parábola conservará la forma

$$y^2 = 2px.$$

4°. Si en la ecuación de la parábola permutamos las coordenadas variables x e y, resulta:

$$\boxed{x^2 = 2py} \qquad \text{(XLIII)}$$

El eje Oy sirve de eje de simetría de esta parábola. Si $p > 0$, la parábola está situada encima del eje Ox (fig. 49), y si $p < 0$, se encuentra debajo del eje Ox (fig. 50).

Es conveniente tener presente que sirve de eje de la parábola el eje de coordenadas *homónimo* de la coordenada variable, que figura en la ecuación de la parábola con potencia de primer grado.

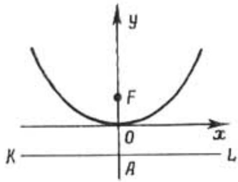


Fig. 49

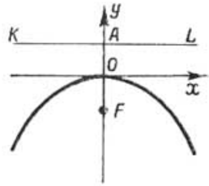


Fig. 50

5°. De la ecuación $x^2 = 2py$ se deduce que:

$$y = \frac{1}{2p} x^2.$$

Haciendo $\frac{1}{2p} = a$, se tiene: $y = ax^2$, la ecuación de la parábola, conocida ya del álgebra.

6°. Advertamos que la parábola no tiene centro.

§ 39. Construcción de la parábola

1°. Con un movimiento continuo (fig. 51). Se da p, el parámetro de la parábola. Se trazan dos rectas KL y Ox, perpendiculares entre sí, y se toma una de ellas (KL) como directriz, y la otra (Ox), como eje de la parábola. Se indica el foco F, marcando con un compás en el eje Ox, a partir de la directriz KL, la distancia AF, igual a p. Se coloca una regla a lo largo de la directriz; luego se pone el cateto menor de una escuadra a lo largo de la regla. En el vértice del ángulo agudo B, opuesto al cateto menor de la escuadra, se sujeta un hilo, y el otro extremo del hilo se sujeta en el foco F; la longitud del hilo BF tiene que ser en este caso igual al cateto mayor de la escuadra. Estirando el hilo con la punta de un lapicero, como se indica en la figura 51, se traza una curva, manteniendo el hilo estirado mientras se mueve el lapicero sobre el papel, la punta del lapicero junto a la escuadra, y ésta en contacto con la regla. Cada punto M de esta curva pertenece a la parábola, porque $MN = MF$.

2°. C o n s t r u c c i ó n p o r p u n t o s (fig. 52). Partiendo de que la distancia de cualquier punto de la parábola a la directriz es igual al radio vector r, y de que

$$r = x + \frac{p}{2},$$

se deduce el procedimiento de determinación de los puntos de la parábola. Al encontrar, como en el caso anterior, la directriz, el eje, el foco y el vértice de la parábola, trazamos la recta P_1Q_1, paralela a la directriz, de tal modo

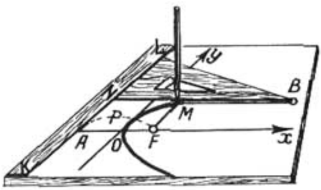


Fig. 51

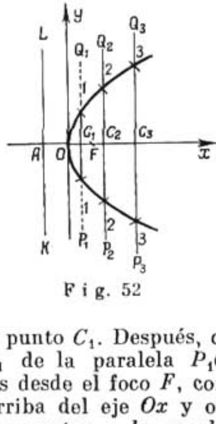


Fig. 52

que corte al eje de la parábola en el punto C_1. Después, con un radio igual a la distancia AC_1 de la paralela P_1Q_1, a partir de la directriz KL trazamos desde el foco F, como centro, arcos pequeños, uno más arriba del eje Ox y otro más abajo de él, de tal manera que corten a la paralela P_1Q_1. Los puntos de intersección (en la figura 52 están señalados con la cifra 1) pertenecen a la parábola, porque para cada uno de ellos

$$r = AC_1 = \frac{p}{2} + x.$$

Trazando algunas otras rectas, P_2Q_2, P_3Q_3, etc., paralelas a la directriz KL, y repitiendo para cada una de ellas las mismas operaciones de determinación de los puntos que en el caso de la recta P_1Q_1, cada vez se obtendrán dos puntos de la parábola (en la figura están señalados respectivamente con las cifras 2, 3, ...).

Observemos que al construir la parábola se deben acercar los puntos C_1, C_2, C_3... al aproximarse éstos al vértice O, y alejarlos a medida que se apartan a la derecha del vértice a lo largo del eje Ox.

Cuando se ha señalado el número suficiente de puntos, trazamos, siguiendo dichos puntos, bien a mano o con una plantilla, una curva continua poco cerrada, que es la parábola.

§ 40. Ecuación de la parábola en el caso de traslación paralela de los ejes de coordenadas

1°. Supongamos que el vértice de la parábola está situado en el puto O' (a, b) y que el eje de la parábola es paralelo al eje Oy (fig. 53). Figurémonos un sistema de coordenadas $x'O'y'$, cuyo origen es el vértice de la parábola O' (a, b), el eje $O'y' \parallel Oy$ es el eje de la parábola, el eje $O'x' \parallel Ox$. En el sistema de coordenadas $x'O'y'$, la ecuación de la parábola es:

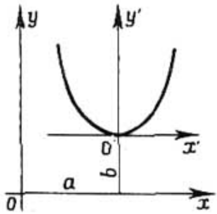


Fig. 53

$$x'^2 = 2py',$$

y en el sistema xOy:

$$\boxed{(x-a)^2 = 2p(y-b),} \quad \text{(XLIV)}$$

porque para cada punto M de la parábola, según la fórmula (XXXIX), tenemos:

$$x' = x - a, \quad y' = y - b.$$

Si el vértice de la parábola es O' (a, b) y el eje de la parábola $O'x'$ es paralelo al eje Ox, la ecuación de la parábola será la siguiente:

$$\boxed{(y-b)^2 = 2p(x-a)} \qquad \text{(XLV)}$$

2°. Resolvamos la ecuación (XLIV) respecto a y:

$$y = \frac{1}{2p}(x-a)^2 + b,$$

o

$$y = \frac{1}{2p} x^2 - \frac{a}{p} x + \frac{a^2}{2p} + b.$$

Indicando $\frac{1}{2p} = A$, $-\frac{a}{p} = B$, $\frac{a^2}{2p} + b = C$, se tiene:

$$\boxed{y = Ax^2 + Bx + C,} \qquad \text{(XLVI)}$$

es decir, la parábola $(x - a)^2 = 2p\,(y - b)$ es la gráfica de la función cuadrada $y = Ax^2 + Bx + C$.

3°. Si *en la ecuación de segundo grado con relación a las coordenadas* x, y:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

faltan el segundo y tercer (o el segundo y primer) términos, representa una parábola con el eje paralelo al eje Oy (o paralelo al eje Ox).

Esta condición es necesaria. En efecto, la parábola, cuyo eje es paralelo a Oy, se expresa mediante la ecuación (XLVI):

$$y = Ax^2 + Bx + C = 0, \text{ o } Ax^2 + Bx - y + C = 0,$$

o sea, por medio de la ecuación general de segundo grado con relación a las coordenadas x, y, en la cual faltan el segundo y tercer términos.

Esta condición es suficiente. En efecto, dividiendo la ecuación

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

por A:

$$x^2 + \frac{D}{A} x + \frac{E}{A} y + \frac{F}{A} = 0,$$

y pasando los dos últimos términos al segundo miembro, se tiene:

$$x^2 + \frac{D}{A} x = -\frac{E}{A} y - \frac{F}{A},$$

completamos $x^2 + \frac{D}{A} x$ hasta el cuadrado de un binomio,

$$x^2 + 2x\frac{D}{2A} + \frac{D^2}{4A^2} = -\frac{E}{A} y - \frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2},$$

después de fransformar obtenemos una ecuación que representa una parábola, con el eje paralelo a Oy:

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A} y + \frac{D^2 - 4AF}{4A^2},$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}\left(y - \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\right),$$

y cuyo vértice tiene las coordenadas

$$a=-\frac{D}{2A},\quad b=\frac{D^2-4AF}{4AE},$$

y el parámetro:

$$p=-\frac{E}{2A}.$$

§ 41. Ejemplos de resolución de problemas

1°. Formar la ecuación de la parábola con el vértice en el origen de coordenadas, conociendo las coordenadas del foco $(-2;\ 0)$.

Solución. Según la condición, el foco de la parábola está situado en el eje Ox y el vértice se encuentra en el origen de coordenadas, por lo tanto, la ecuación de la parábola es:

$$y^2=2px.$$

La distancia focal de la parábola $OF=\frac{p}{2}=-2$. Por lo tanto $2p=-8$, y la ecuación buscada de la parábola es:

$$y^2=-8x.$$

2°. Formar la ecuación de la parábola, conociendo la ecuación de su directriz $y=-3$, y las coordenadas del foco $(4;\ 1)$.

Solución. Según la condición, la directriz es paralela al eje Ox, por lo tanto, el eje de la parábola es paralelo al eje Oy y su ecuación es $x=4$. El punto de intersección de la directriz con el eje de la parábola es $A\ (4;\ -3)$. El parámetro p es la distancia desde el punto $A\ (4;\ -3)$ hasta $F\ (4;\ 1)$ y se determina según la fórmula I, § 3:

$$p=1-(-3)=4.$$

El vértice $O\,(a,\ b)$ es el punto medio del segmento AF. Según la fórmula V, § 4:

$$a=\frac{4+4}{2}=4,\quad b=\frac{-3+1}{2}=-1.$$

La ecuación de la parábola dada tiene la forma:

$$(x-a)^2=2p\,(y-b).$$

Sustituyendo en ella a b, p por los valores obtenidos, resulta:

$$(x-4)^2=8\,(y+1),\quad \text{o}\quad x^2-8x-8y+8=0.$$

3°. Determinar las coordenadas del vértice y el valor del parámetro de la parábola cuya ecuación es:

$$y^2+5x-6y+14=0.$$

Hállense también las coordenadas de su foco y la ecuación de la directriz.

S o l u c i ó n. Primer método. Trasladamos el origen de coordenadas al vértice de la parábola O' (a, b), sin alterar la dirección de los ejes, y representamos el sistema obtenido por medio de $x'O'y'$. Según la fórmula (XXXIX) se obtiene:

$$\boxed{x = x' + a, \quad y = y' + b} \qquad \text{(XXXIXa)}$$

Sustituyendo en la ecuación dada los valores de x, y por x', y' resulta la ecuación de la parábola relativa al vértice:

$$(y'+b)^2 + 5(x'+a) - 6(y'+b) + 14 = 0,$$

o

$$y'^2 + 2by' + b^2 + 5x' + 5a - 6y' - 6b + 14 = 0,$$

o

$$y'^2 + 5x' + (2b-6)\,y' + (5a - 6b + b^2 + 14) = 0. \qquad (1)$$

Pero la ecuación de la parábola referida al vértice O' tiene la forma:

$$y'^2 = 2px', \quad \text{o} \quad y'^2 - 2px' = 0. \qquad (2)$$

Para que las ecuaciones (1) y (2) sean idénticas, es necesario que:

$$1)\ 2b - 6 = 0, \quad 2)\ 5a - 6b + b^2 + 14 = 0 \quad \text{y} \quad 3)\ 5 = -2p.$$

De la primera condición tenemos que $b = 3$. Sustituyendo $b = 3$ en la segunda condición, resulta:

$$5a - 6\cdot 3 + 3^2 + 14 = 0, \ a = -1.$$

De la tercera igualdad se deduce que $p = -\frac{5}{2}$.

Por lo tanto, la parábola dada tiene el vértice O' $(-1;\ 3)$ y el parámetro $p = -\frac{5}{2}$. El signo negativo del parámetro indica que el eje de la parábola, siendo paralelo al eje Ox, tiene la dirección contraria a la dirección positiva del eje Ox.

El foco de la parábola respecto al sistema de ejes $x'O'y'$ con origen en el vértice de la misma, tiene las coordenadas $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$, y el vértice O' tiene, respecto a los ejes dados xOy, las coordenadas (a, b). Las coordenadas del foco relativas al sistema dado de coordenadas xOy se obtienen aplicando la fórmula (XXXIXa):

$$x_{\text{foco}} = \frac{p}{2} + a = -\frac{5}{4} - 1 = -2\,\frac{1}{4}, \quad y_{\text{foco}} = 0 + b = 3.$$

Por consiguiente, la parábola dada tiene el foco $F\left(-2\,\frac{1}{4};\ 3\right)$. La ecuación de la directriz referida al sistema de ejes que tiene como origen el vértice O' (a, b) es la siguiente: $x' = -\frac{p}{2}$. Aplicando la fórmula (XXXIXa), obtenemos la ecuación de la directriz:

$$x=-\frac{p}{2}+a=-\left(-\frac{5}{4}\right)-1=\frac{1}{4}.$$

El procedimiento expuesto de transformación de la ecuación dada en ecuación canónica, puede aplicarse para determinar los parámetros de la ecuación de cualquier curva de segundo orden, solamente si la ecuación no tiene término con el producto xy.

Segundo método. Reducir la ecuación

$$y^2+5x-6y+14=0$$

a la forma

$$(y+b)^2=2p(x+a). \qquad (1)$$

Para esto se pasan $5x$ y 14 al segundo miembro de la igualdad:

$$y^2-6y=-5x-14,$$

y completamos el primer miembro hasta el cuadrado de un binomio, sumando 9. Se obiene:

$$(y-3)^2=-5(x+1). \qquad (2)$$

Comparando las ecuaciones (1) y (2) llegamos a la conclusión que $a=-1$, $b=3$; $2p=-5$, es decir, la parábola tiene el vértice $O'(-1;\ 3)$ y el parámetro $p=-\frac{5}{2}$.

La solución ulterior es análoga a la del primer método.

§ 42. Las curvas de segundo orden como secciones

1°. Si una recta infinita SA (fig. 54) se traslada en el espacio de tal modo que pase constantemente por un punto S y se deslice por cierta curva $ACBD$, la superficie que engendra la recta SA en este caso se llama *cónica* o simplemente *cono*. La curva $ACBD$ se llama en tal caso *directriz*; la recta SA se llama *generatriz* del cono, y el punto S, *vértice* del cono. Si la directriz del cono tiene como centro O, la recta SO, que une el vértice con el centro, se llama *eje* del cono. La superficie cónica está compuesta de dos partes, que se extienden indefinidamente desde el vértice S a ambos lados.

Ocupémonos del *cono circular recto*. Se obtiene este cono si hace de directriz $ABCD$ una circunferencia, y si el vértice S se encuentra en la perpendicular al plano del círculo $ACBD$, trazado por su centro; en este caso la perpendicular OS sirve de eje del cono. La sección del cono a través del plano que pasa por el eje SO se llama ***sección axial del*** *cono*, y el ángulo ASB del vértice S situado en la sección axial del cono, se llama *ángulo de la sección axial.*

2°. Tomemos en la superficie cónica un punto arbitrario Q (fig. 54), que no coincida con el vértice S; tracemos por él la sección axial $ASQB$ y los planos PQ, P_1Q, P_2Q, P_3Q, perpendiculares al plano de la sección axial $ASQB$. Pueden presentarse los siguientes casos:

1) el plano secante PQ es perpendicular al eje SO del cono; la linea de intersección de éste con la superficie cónica es una circunferencia;

2) el plano P_1Q se corta con cada una de las generatrices en una parte del cono a una distancia finita de su vértice S (esto ocurre mientras el ángulo P_1QB sea mayor que el ángulo ASB); la línea de intersección es en este caso una curva cerrada, una elipse;

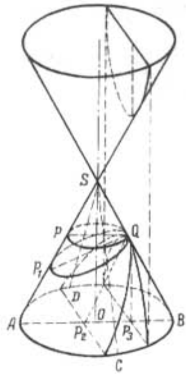


Fig. 54

3) el plano P_2Q es paralelo a una generatiz, por ejemplo a SA, ($\angle P_2QB = \angle ASB$), y se corta con las demás generatrices en una parte del vértice S; la línea de intersección del plano secante con la superficie cónica es en este caso una curva abierta que tiene un punto alejado indefinidamente (una parábola);

4) el plano P_3Q es paralelo a dos generatrices del cono (en la fig. 54, SC y SD); en este caso corta a las dos partes del cono ($\angle P_3QB < \angle ASB$), y al cortarse con cada parte se forma una curva abierta, que son las ramas de una hipérbola.

De este modo, la intersección de un plano con la superficie cónica se efectúa por una de las curvas de segundo orden. Por eso, las curvas de segundo orden se llaman también secciones cónicas.

Demostremos que una sección cónica es una elipse si el plano secante PQ (fig. 55) se corta con cada generatriz del cono a un lado de su vértice S.

D e m o s t r a c i ó n. Inscribamos en el cono, a uno y otro lado del plano secante PQ, esfera, de tal modo que el plano PQ sea tangente a esas esferas. Señalamos los puntos de contacto mediante F y F_1.

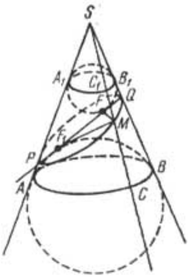
Como las tangentes trazadas de cualquier punto dado a la esfera son iguales entre sí, resulta:

a) todos los puntos de contacto con el cono de cada esfera inscrita están situados en un plano, perpendicular al eje del cono precisamente en el plano $A_1B_1C_1$ para la esfera superior, y en el plano ABC para la esfera inferior;

b) los segmentos de las generatrices del cono, situados entre estos planos, son iguales entre sí, es decir,

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = \ldots = \text{const.} \tag{1}$$

En la línea de corte del cono con el plano PQ tomamos un punto arbitrario M, que unimos con los puntos F y F_1. Los segmentos MF y MF_1 son tangentes respectivamente de una y otra esfera.



F i g. 55

Tracemos por el punto M la generatriz SM, que es tangente de una esfera en el punto C y de la otra en el punto C_1.

De este modo, desde el punto M se han trazado a la esfera inferior y a la superior dos tangentes a cada una de ellas. A la inferior MF_1 y MC, siendo

$$MF_1 = MC, \tag{2}$$

y a la superior MF y MC_1, siendo

$$MF = MC_1. \tag{3}$$

Sumando las igualdades (2) y (3), se tiene:

$$MF + MF_1 = MC + MC_1 = CC_1.$$

No varía la longitud del segmento CC_1, según la igualdad (1), al desplazarse el punto M por la línea de corte del cono por el plano PQ. Por eso, la línea en que corta al cono el plano PQ posee la propiedad de que la suma de las distancias de cualesquiera de sus puntos M hasta los puntos F y F_1 es constante. Por lo tanto, esta línea es una elipse con los focos en los puntos F y F_1.

Del mismo modo se puede demostrar también que la parábola y la hipérbola son secciones cónicas.

B. ELEMENTOS DEL CALCULO DIFERENCIAL

CAPITULO IV

TEORIA DE LOS LIMITES

§ 43. La magnitud absoluta y sus propiedades

Convengamos en que, aquí y en adelante, al expresar la palabra "número" tenemos en cuenta un "número real".

1°. Definiciones. *Se llama magnitud absoluta de un número positivo al propio número positivo, y se llama magnitud absoluta de un número negativo al número positivo contrario a éste. Se admite como magnitud absoluta de cero al propio cero.*

La magnitud absoluta de un número se señala colocando dicho número entre dos rayitas verticales.

Según esto: $|7| = 7$; $|-3| = 3$; $|0| = 0$. Si el número a es positivo, $|a| = a$, y si a es negativo, $|a| = -a$.

2°. Propiedades. 1. *La magnitud absoluta de la suma de varios números no es mayor que la suma de las magnitudes absolutas de sus sumandos, es decir,*

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

En efecto, si los números a y b son positivos o los dos son negativos, para obtener su suma se suman sus magnitudes absolutas y se les pone el signo común. La magnitud absoluta de la suma, por consiguiente, es igual a la suma de las magnitudes absolutas de los sumandos. Por ejemplo: $a = -3$, $b = -7$:

$$(-3)+(-7)| = |-10| = 10 \quad \text{y} \quad |-3|+|-7| = 3+7 = 10;$$
$$|(-3)+(-7)| = |-3|+|-7|.$$

Si a y b tienen signos diferentes, al sumarlos se resta de la magnitud absoluta mayor la menor y se pone el signo del sumando que tiene mayor magnitud absoluta. Por eso, la magnitud absoluta de la suma es menor que la suma de las magnitudes absolutas de los sumandos.

Por ejemplo, la magnitud absoluta de la suma de los números $|(-7)+(+3)|=|-4|=4$, y la suma de las magnitudes absolutas de estos mismos números $|-7|+$ $+|+3|=7+3=10$; es decir,

$$|(-7)+(+3)|<|-7|+|+3|.$$

La propiedad demostrada puede hacerse extensiva a cualquier número constante de sumandos, o sea,

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\leqslant|a_1|+|b_2|+\ldots+|a_n|.$$

2. *La magnitud absoluta de la diferencia de dos números es mayor o igual que la diferencia de las magnitudes absolutas de estos números, es decir,*

$$|a-b|\geqslant|a|-|b| \quad \text{o} \quad |a-b|\geqslant|b|-|a|$$

En efecto, supongamos que

$$a-b=c.$$

De donde:

$$a=b+c.$$

Según lo anterior

$$|a|\leqslant|b|+|c|.$$

Despejando la c en la desigualdad, se tiene:

$$|c|\geqslant|a|-|b|,$$

o

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

Al cambiar el signo de un número no se altera su magnitud absoluta. Por eso

$$|a-b|=|b-a|.$$

Pero, según lo demostrado

$$|b-a|\geqslant|b|-|a|.$$

Por ello también es cierta la desigualdad:

$$|a-b|\geqslant|b|-|a|.$$

Observemos que la diferencia $|a|-|b|$ o $|b|-|a|$ puede ser negativa.

3. *La magnitud absoluta del producto es igual al producto de las magnitudes absolutas de los factores, es decir,*

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

4. *La magnitud absoluta del cociente es igual al cociente obtenido al dividir la magnitud absoluta del dividendo por la del divisor, es decir,*

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

5. *La magnitud obsoluta de la potencia con exponente entero positivo es igual a la misma potencia de la magnitud absoluta de su base, es decir,*

$$|a^n| = |a|^n.$$

Las propiedades 3, 4 y 5 se desprenden de las propiedades de la multiplicación y de la división.

§ 44. Magnitud infinitésima

1°. Definición. *Una magnitud variable se llama infinitamente pequeña (infinitésima), si a partir de un momento de su variación, la magnitud absoluta de su valor se hace menor que cualquier número positivo* ε *dado y permanece siendo menor que él.*

2°. Ejemplos. 1. El lado de un polígono regular inscrito es una magnitud infinitésima al duplicar indefinidamente el número de sus lados, porque en tal caso, el lado puede hacerse todo lo pequeño que se quiera, es decir, menor que cualquier número positivo ε por pequeño que sea.

2. Al crecer indefinidamente la magnitud absoluta de x $\left(\text{por ejemplo, } \frac{1}{x} = \frac{1}{10};\ \frac{1}{100};\ \frac{1}{1000};\ \ldots \text{ o } \frac{1}{x} = \frac{1}{-10};\ \frac{1}{-100};\ \frac{1}{-1000};\ \ldots\right)$, el quebrado $\frac{1}{x}$ es una magnitud infinitésima. En efecto, por pequeño que sea el número positivo dado ε, al crecer $|x|$ indefinidamente, llegará un momento a partir del cual $|x|$ será mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$: y la magnitud inversa $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$:

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ y } \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$$

3. El quebrado $\frac{p}{x}$, en el que p es constante y $|x|$ crece indefinidamente, es infinitésimo, porque siempre se puede

conseguir que $\left|\frac{p}{x}\right| < \varepsilon$ para lo cual es suficiente tomar $|x| > \frac{|p|}{\varepsilon}$.

3°. Indicaremos los infinitésimos con las primeras letras del alfabeto griego: α, β, γ...

Según la definición, α es una magnitud infinitésima si

$$|\alpha| < \varepsilon,$$

donde ε es un número cualquiera dado, positivo y pequeño.

4°. No debe confundirse una magnitud infinitésima con un número pequeño. Cualquier número pequeño $c \neq 0$ es invariable y siempre se puede hallar otro número positivo ε tal que $|c|$ no sea menor que ε.

Por lo tanto, *cualquier número pequeño* c, *distinto a cero, no es una magnitud infinitésima.*

§ 45. Magnitudes variables acotadas y sin cotas

1°. Definición. *La variable x se llama magnitud acotada si a partir de cierto momento su magnitud absoluta se hace no mayor que un cierto número positivo m,*

$$|x| \leqslant m, \tag{1}$$

y continúa siéndolo.

En caso contrario la variable x se llama *magnitud sin cotas* (no acotada).

Para una magnitud sin cotas no se puede indicar un número m, para el cual, a partir de cierto momento, se cumple la desigualdad (1). Por el contrario, para una magnitud sin cotas variable existen tales valores para los cuales se cumple la desigualdad $|x| > m$, cualquiera que sea m.

2°. Cualquier número dado puede considerarse como una magnitud acotada.

3°. Cualquier magnitud infinitésima α es una magnitud acotada, porque la magnitud absoluta de α, a partir de cierto momento, no sólo se hace menor que cierto número positivo determinado m, sino menor que *cualquier* número pequeño positivo ε dado $|\alpha| < \varepsilon$.

§ 46. Propiedades principales de los infinitésimos

1°. *Al cambiar el signo de una magnitud infinitésima por el contrario, la magnitud permanece siendo infinitésima.*

2°. Teorema. *Si α y β son infinitésimos, su suma y su diferencia son magnitudes infinitésimas.*

D e m o s t r a c i ó n. En todo caso, por diferentes que sean los cambios de los valores de α y β en el proceso de aproximación de α y β a cero, por definición, llegará un momento a partir del cual la magnitud absoluta de los valores de cada una de ellas permanecerá siendo menor que $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |\beta|<\frac{\varepsilon}{2},$$

y su suma, por lo tanto, permanecerá siendo menor que ε,

$$|\alpha|+|\beta|<\varepsilon.$$

Pero $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$ (§ 43, 2°). De donde:

$$|\alpha+\beta|<\varepsilon.$$

Por lo tanto, la suma $\alpha+\beta$ es una magnitud infinitésima.

Como la magnitud infinitésima β al cambiar de signo sigue siendo infinitésima, la diferencia $\alpha-\beta$ que es igual a la suma de las infinitésimas α y $-\beta$.

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta),$$

es también una magnitud infinitésima.

3°. *La suma algebraica de varios infinitésimos es una magnitud infinitésima.*

Por ejemplo, $\alpha+\beta-\gamma+\delta+\xi$ es un infinitésimo, porque el resultado de cada adición o substracción de dos infinitésimos es una magnitud infinitésima.

4°. *El producto de una magnitud acotada x por un infinitésimo α es una magnitud infinitésima.*

D e m o s t r a c i ó n. En el proceso de variación de x y α (según la definición) forzosamente llegará un momento a partir del cual se mantendrán inalterables las desigualdades:

$$|x|<m, \tag{1}$$

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{m}, \tag{2}$$

siendo m cierto número positivo determinado y para su producto se conservará la desigualdad

$$|x|\cdot|\alpha|<\varepsilon.$$

Pero $|x|\cdot|\alpha|=|x\cdot\alpha|$ (§ 43, 3). De donde: $|x\cdot\alpha|<\varepsilon$.

Por lo tanto, el producto $x\alpha$ es una magnitud infinitésima.

5°. Cualquier número y todo infinitésimo pueden considerarse como magnitudes acotadas; por lo tanto, en particular:

1. *El producto de una constante por un infinitésimo es una magnitud infinitésima.*

2. *El producto de varios infinitésimos es una magnitud infinitésima.*

(Si el producto $\alpha\cdot\beta$ es una magnitud infinitésima, el producto $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$, en el que γ es el tercer infinitésimo, resultando una magnitud infinitésima, etc.)

3. *La potencia entera y positiva de un infinitésimo es una magnitud infinitésima*, porque

$$\alpha^n=\overbrace{\alpha\cdot\alpha\,\ldots\,\alpha}^{n \text{ veces}}.$$

6°. Observación. El cociente de dos magnitudes infinitésimas puede no ser una magnitud infinitésima. Por ejemplo, si

$$\alpha=2\beta, \text{ entonces } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\beta}{\beta}=2.$$

A continuación se demostrará que el cociente de dos magnitudes infinitésimas puede ser una magnitud acotada no infinitésima o también una magnitud infinitésima, o una magnitud infinitamente grande (§ 47).

§ 47. La magnitud infinitamente grande

El término "magnitud infinitamente grande", como el término "magnitud infinitamente pequeña", no determina la medida de la magnitud, sino el carácter de variación de su valor numérico.

1°. Definición. *La variable x se llama infinitamente grande (infinita) si a partir de cierto momento de variación de x, la magnitud absoluta de su valor se hace mayor que cualquier número positivo N y permanece siendo mayor que él*, es decir, si a partir de cierto valor de x se tiene la desigualdad:

$$|x|>N,$$

por grande que sea el número positivo N.

2°. E j e m p l o 1. Al crecer el arco α desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$, la $\operatorname{tg}\alpha$ es positiva y crece indefinidamente; al disminuir el arco α desde 0 hasta $-\frac{\pi}{2}$, la $\operatorname{tg}\alpha$ es negativa y disminuye indefinidamente. En ambos casos, el valor absoluto de $\operatorname{tg}\alpha$ a partir de cierto valor del arco α, se hace mayor que cualquier número positivo N dado, por grande que sea éste, y permanece siendo mayor que él, es decir,

$$|\operatorname{tg}\alpha| > N.$$

Por eso, al crecer α desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$ o al disminuir α desde 0 hasta $-\frac{\pi}{2}$, la $\operatorname{tg}\alpha$ es una magnitud infinitamente grande.

E j e m p l o 2. $x = (-1)^n \cdot n$, donde n toma significación de la serie natural, es decir, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Los valores $x = -1, 2, -3, +4, \ldots$, es decir x unas veces crece y otras disminuye, pero $(x) = 1, 2, 3, 4, \ldots$ crece ilimitadamente; x es una magnitud infinitamente grande.

§ 48. Relación entre las infinitas y los infinitésimos

1°. *Si x es una magnitud infinitamente grande, su recíproca $\frac{1}{x}$ es un infinitésimo.*

En efecto, por pequeño que sea el número positivo ε, según la definición de la magnitud infinitamente grande, llega un momento tal que $|x|$ será mayor que $\frac{1}{\varepsilon} = N$, es decir,

$$|x| > N = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Pero entonces

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\frac{1}{x}$ es una magnitud infinitésima.

2°. *Si α es una magnitud infinitésima, que nunca llega a cero, su recíproca $\frac{1}{\alpha}$ es una magnitud infinitamente grande.*

En efecto, por grande que sea el número positivo N, para la magnitud infinitésima α llega un momento en el que $|\alpha|$ es menor que $\frac{1}{N} = \varepsilon$ es decir,

$$|\alpha| < \varepsilon = \frac{1}{N}.$$

Pero entonces

$$\left|\frac{1}{\alpha}\right| > N.$$

Por lo tanto, $\frac{1}{\alpha}$ es una magnitud infinitamente grande.

3°. Nota. Al considerar las relaciones entre las magnitudes infinitésimas y las magnitudes infinitamente grandes (2°), se toma una magnitud infinitésima, *que nunca llega a cero*. Si la magnitud infinitésima α se convierte en cero, el quebrado $\frac{1}{\alpha}$ dejaría de ser un número, porque la división por cero es imposible.

Aclaremos el concepto *por que la división por cero es imposible*. Hallar el cociente de la división del número a por el número b significa encontrar un tercer número c, cuyo producto por el divisor b sea igual al dividendo a, es decir,

$$\text{si } \frac{a}{b} = c, \text{ se tiene } c \cdot b = a.$$

Si se toma el divisor $b = 0$ y el dividendo $a \neq 0$, y se supone que

$$\frac{a}{0} = c,$$

el producto $0 \cdot c$, sea cual fuere c, será igual a cero y no al número a, es decir,

$$0 \cdot c \neq a.$$

Por eso *no se puede considerar el cociente* $\frac{a}{0}$ *como expresión de un número*. Indiquemos también que tampoco *se puede dividir cero por cero*. En efecto, si suponemos que el cociente $\frac{0}{0}$ es el número c,

$$\frac{0}{0} = c,$$

se tendría

$$c \cdot 0 = 0,$$

pero aquí c no es un número determinado, sino un número cualquiera, porque al multiplicar un número cualquiera por cero se obtiene cero, por lo que no se considera la división de cero por cero.

§ 49. Límite de la magnitud variable

1°. Definición. *El número a se llama límite de la variable x, si en el proceso de variación el valor de x se aproxima al número a de tal modo que el valor absoluto de la diferencia $x - a$, a partir de cierto momento, se hace tan pequeño como se quiera, es decir, más pequeño que cualquier número positivo ε y permanece más pequeño que él.*

$$|x - a| < \varepsilon$$

2°. E j e m p l o 1. Supongamos que la variable x toma uno tras otro los siguientes valores:

$$x_1 = 1,95;\ x_2 = 1,995;\ x_3 = 1,9995;\ \ldots,\ x_n = \overbrace{1,99\ldots95}^{n\ \text{veces}};\ \ldots$$

El valor x se aproxima al número 2. Convengamos en que la aproximación de x al número 2 se efectúa indefinidamente, es decir, que el valor absoluto de la diferencia $x - a$ puede hacerse menor que cualquier número pequeño positivo dado.

Determinemos el valor absoluto de la diferencia entre los valores de x y el número 2:

$$|x_1 - 2| = |1,95 - 2| = |-0,05| = 0,05;$$

$$|x_2 - 2| = |1,995 - 2| = |-0,005| = 0,005,\ \text{etc.}$$

$$|x_n - 2| = |1,\overbrace{99\ldots9}^{n}5 - 2| = |-0,\overbrace{00\ldots0}^{n}5| =$$

$$= 0,\overbrace{00\ldots0}^{n}5,\ \text{etc.}$$

Tomemos arbitrariamente un número cualquiera pequeño positivo, por ejemplo *0,000001. El valor absoluto de la* diferencia entre el valor x_n de la variable x y el número 2, igual a $0,\overbrace{00\ldots0}^{n}5$ será menor que 0,000001 cuando $n \geqslant 6$. Supongamos que se trata de cualquiter número pequeño positivo ε y no sólo de 0,000001. Para que el número 2 sea el límite de x, es preciso que a partir de cierto número n se cumpla inalterablemente la desigualdad:

$$|x_n - 2| < \varepsilon,$$

ó

$$0,\overbrace{00\ldots0}^{n}5\ \frac{1}{2\cdot 10^n} < \varepsilon.$$

De aquí resulta:

$$2\cdot 10^n > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

$$10^n > \frac{1}{2\varepsilon}\,,$$

$$n > \lg\frac{1}{2\varepsilon}\,.$$

Por lo tanto, a partir del momento en que n se hace mayor que $\lg\frac{1}{2\varepsilon}$, para todos los valores de x se cumple inalterablemente la desigualdad:

$$|x_n - 2| < \varepsilon.$$

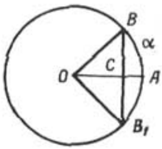
Por consiguiente, el número 2, por definición, es el límite de la variable x.

3°. E l e m p l o 2. *Al tender el arco α a cero, el límite de senα es igual a cero.*

D e m o s t r a c i ó n. La variable $x = \operatorname{sen}\alpha$. Se entiende por valor de un arco el número α es decir, su medida expresada en radianes.

Tomemos el círculo unitario (fig. 56) consideremos la aproximación de α a cero a partir de cierto valor de ella positivo o negativo, por ejemplo, a partir de un valor de α cuya magnitud absoluta sea menor que $\frac{\pi}{2}$,

$$|\alpha| < \frac{\pi}{2}.$$



F i g. 56

Por lo tanto, tendremos que

$$|\operatorname{sen}\alpha| \leqslant |\alpha|,$$

porque la longitud de la mitad de la cuerda BB_1 es menor que la mitad del arco tendido en ella BAB_1.

Pero si

$$|\operatorname{sen}\alpha| \leqslant |\alpha|,$$

se tiene

$$|\operatorname{sen}\alpha - 0| \leqslant |\alpha|.$$

Tendiendo la magnitud del arco α a cero, obtenemos tal valor de α a partir del cual resultará

$$|\alpha| < \varepsilon,$$

por pequeño que sea el número positivo ε asignado.

De aquí se deduce que

$$|\operatorname{sen}\alpha| < \varepsilon \text{ y } |\operatorname{sen}\alpha - 0| < \varepsilon,$$

o que el límite de sen $\alpha = 0$, cuando α tiende a cero, 4°. E j e m p l o 3. Supongamos que la variable $x = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$. Demostremos que el límite de x es igual a cero cuando α es positivo y crece indefinidamente.

D e m o s t r a c i ó n. Para cualquier valor de α, $\operatorname{sen} \alpha$ no es mayor que la unidad.

Por eso, sustituyendo el valor del numerador del quebrado $\frac{\operatorname{sen} \pi}{\alpha}$ por la unidad, se obtiene:

$$\frac{|\operatorname{sen} \alpha|}{\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha}$$

(α es positivo).

Por pequeño que sea el número positivo ε dado, al crecer indefinidamente α llegará un momento en el que a partir de él, α será mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$.

$$\alpha > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{y} \quad \frac{1}{\alpha} < \varepsilon.$$

Por eso

$$\left|\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha}\right| < \varepsilon \ \text{ y } \ \left|\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} - 0\right| < \varepsilon.$$

En consecuencia, el límite de x es igual a cero.

5°. Según la definición del límite si

$$|x - a| < \varepsilon \text{ tendremos, } \lim x = \alpha.$$

Si $|x-a| < \varepsilon$ suele decirse; "La variable x se aproxima indefinidamente a a" o "tiende a a" y se escribe $x \to a$.

Por medio del símbolo lim, los límites de las varibales hallados en los ejemplos examinados se escriben como sigue:

$$1. \ \lim_{n \to \infty} \overbrace{1{,}99 \ldots 95}^{n} = 2;$$

$$2. \ \lim_{\alpha \to 0} \operatorname{sen} \alpha = 0;$$

$$3. \ \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 0.$$

6°. Si la variable α es una magnitud infinitamente pequeña, su magnitud absoluta se hace menor que cualquier número pequeño positivo ε,

$$|\alpha| < \varepsilon.$$

Pero entonces, la magnitud absoluta de la diferencia entre α y cero también es menor que ε.

$$|\alpha - 0| < \varepsilon.$$

De aquí se deduce que *el límite de una magnitud infinitamente pequeña α es igual a cero*,

$$\lim \alpha = 0.$$

En ocasiones, esta propiedad del infinitésimo determina el concepto de la magnitud infinitamente pequeña y la definición se expresa así: *se llama magnitud infinitamente pequeña a la variable cuyo límite es igual a cero.*

A base de esta definición de magnitud infinitamente pequeña se puede obtener su propiedad: $|\alpha| < \varepsilon$, y demostrar a continuación todas las demás propiedades de las magnitudes infinitamente pequeñas, como se ha hecho en el § 46.

§ 50. Representación geométrica del número, de la variable y del límite

1°. Cualquier número real a se representa en el eje numérico Ox por medio de un punto (fig. 57), cuya abscisa es igual a a. Partiendo de esto, en el análisis se señalan

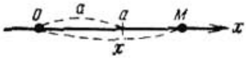


Fig. 57

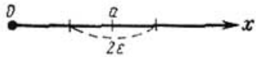


Fig. 58

con una misma letra minúscula el número, el punto que representa a este número y la abscisa de dicho punto. Al decir: "dado el punto a", se entiende también: "dado el número a„ y viceversa.

2°. La magnitud variable x se representa también sobre el eje numérico por medio de un punto, que no es fijo, sino movible. Supongamos que el punto M (fig. 57) del eje Ox va cambiando de posición de tal modo que su abscisa equivale siempre al valor numérico de la variable x. Este punto movible M se toma como representación geométrica de la variable x.

3°. Tomemos en el eje numérico Ox un punto fijo a (fig. 58) y tracemos a su izquierda y a su derecha segmentos de longitud igual a ε, con lo que obtendremos un segmento de longitud 2ε cuyo punto medio será el punto a.

D e f i n i c i ó n. *El conjunto de todos los puntos situados en un segmento de longitud 2ε, cuyo punto medio es a, se llama entorno 2ε del punto a.*

El número ε se llama radio del entorno, y el punto a, su centro.

Es evidente que cualquier punto a del eje Ox puede tener infinidad de entornos.

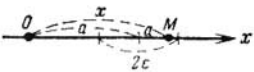


Fig. 59

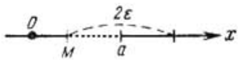


Fig. 60

E j e m p l o. El entorno del punto $a = 2$, de radio $\varepsilon = 0{,}1$ es el conjunto de los puntos del eje Ox cuyas abscisas satisfacen las desigualdades:

$$2-0{,}1<x<2+0{,}1, \quad \text{o} \quad 1{,}9<x<2{,}1.$$

De este modo, el entorno 2ε de un punto significa algebraicamente el conjunto de valores de x que satisfacen las desigualdades:

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon.$$

4°. Supongamos que a es el límite de la variable x. Geométricamente, $|x-a|$ es la distancia Ma (fig. 59) entre el punto movible M y el punto fijo a. Si $|x-a|<\varepsilon$ el punto M pertenece al entorno 2ε del punto a.

De aquí se deduce que:

el número a es el límite de la variable x si por pequeño que sea el entorno 2ε del punto a, a partir de cierto momento, todos los valores (puntos) de x pertenecen a este entorno.

5°. Si x se aproxima a su límite a, siendo todo el tiempo menor (o mayor) que a, el punto M se aproximará a a por la izquierda (o la derecha), y los puntos correspondientes a x a partir de cierto momento se concentrarán solamente en el semientorno de la izquierda (o de la derecha) del punto a (figs. 60 y 61).

Si al aproximarse x a su límite a se hace a veces mayor y a veces menor que a, el punto M oscilará alrededor del punto a, y los puntos correspondientes a x, a partir de cierto momento se concentrarán en el entorno 2ε, tanto a la derecha como a la izquierda de a (fig. 62).

6°. La variable x, que tiene como límite a, es una magnitud acotada. En efecto, a partir de cierto momento, el punto M (fig. 63) queda en un segmento determinado Om, de longitud $|a|+\varepsilon$, por lo que se cumple la desigualdad:

$$|x|<|a|+\varepsilon.$$

La proposición recíproca es falsa. Por ejemplo: $x=\operatorname{sen}\alpha$ es una magnitud acotada, porque $|\operatorname{sen}\alpha|\leqslant 1$.

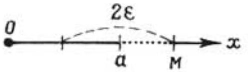


Fig. 61

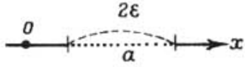


Fig. 62

Sin embargo, $\operatorname{sen}\alpha$ cuando $\alpha\to\infty$ no tiene límite (los valores de $\operatorname{sen}\alpha$ oscilan entre -1 y $+1$ y no pueden pertenecer constantemente a un entorno 2ε de un solo punto).

7°. *Una magnitud infinitamente grande no tiene límite.*

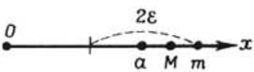


Fig. 63

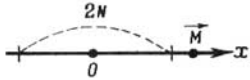


Fig. 64

Esto se puede presentar geométricamente de la siguiente manera. Tracemos en el eje Ox un entorno del cero de radio igual al número positivo N (fig. 64).

Por grande que sea el número N llegará un momento a partir del cual $|x|>N$, y el punto movible M, que representa la magnitud infinitamente grande x, saldrá del entorno $2N$ y en adelante se desplazará fuera de él.

Suele decirse: "el límite de x es igual a infinito", o "la magnitud infinitamente grande x tiene límite infinito", y se escribe $\lim x=\infty$. En el caso de que x sea una magnitud infinitamente grande, y sus valores a partir de cierto momento sean solamente números positivos (o solamente negativos), se escribirá:

$$\lim x=+\infty \text{ (o } \lim x=-\infty).$$

Con ∞ *(infinito) no se efectúa ninguna operación aritmética*; ∞ (infinito) no puede ser sumado, restado, multiplicado, ni dividido por él, ni por ningún otro número, porque ∞ no es un número.

§ 51. Dependencia entre la variable, su límite y una magnitud infinitamente pequeña

La diferencia entre la variable x y su límite a es una magnitud infinitamente pequeña, por ejemplo α,

$$x - a = \alpha,$$

puesto que

$$|x - \alpha| < \varepsilon.$$

De aquí que

$$\boxed{x = a + \alpha,} \tag{1}$$

es decir, *la variable x, cuyo límite es el número a, puede ser representada como la suma de su límite a y un infinitésimo α.*

Recíprocamente, *si a partir de cierto momento cada valor de la variable x representa una suma del número a y de un infinitésimo α, el límite x será igual a a*, es decir,

$$\boxed{\text{si } x = a + \alpha, \text{ tendremos } \lim x = a} \tag{2}$$

§ 52. La variable sólo puede tener un límite

Teorema. *Una variable no puede tener más que un límite.*

Demostración por reducción a lo absurdo. Supongamos que la variable x tiene dos límites diferentes: a y b.

Según lo expuesto anteriormente:

$$x = a + \alpha \tag{1}$$

y

$$x = b + \beta, \tag{2}$$

donde α y β son infinitésimos, Restando (2) de (1), se obtiene:

$$0 = (a - b) + (\alpha - \beta);$$

$$a - b = \beta - \alpha,$$

lo cual es absurdo: el número $a - b$, que no es igual a cero es una magnitud infinitamente pequeña $\beta - \alpha$ (§ 44, 4°).

Consecuencia. *Si la variable tiene límite, éste será único.*

§ 53. El límite de la suma algebraica

Teorema. *El límite de la suma algebraica de unos cuantos sumandos será igual a la suma algebraica de los límites de estos sumandos, si dichos límites existen.*

Demostración. Demostremos el teorema para el caso, por ejemplo, de que la suma tenga tres sumandos. Suponemos que los límites de las variables x, y, z son los números a, b, c respectivamente.

Representemos cada variable como la suma de su límite y de un infinitésimo (§ 51):

$$x = a + \alpha,$$

$$y = b + \beta,$$

$$z = c + \gamma,$$

donde α, β y γ son infinitésimos.

Sumando las dos primeras igualdades y restando del resultado la tercera, obtendremos que la variable $(x + y - z)$ es igual al número $(a + b - c)$ más el infinitésimo $(\alpha + \beta - \gamma)$. *Por eso* (§ 51), *el número constante $a + b - c$ es el límite de la variable $x + y - z$,*

$$\lim (x + y - z) = a + b - c,$$

o

$$\lim (x + y - z) = \lim x + \lim y - \lim z,$$

que es lo que se trataba de demostrar.

§ 54. El límite del producto y de la potencia

1°. Teorema. *El límite del producto de unos cuantos factores será igual al producto de los límites de estos factores, si estos límites existen.*

D e m o s t r a c i ó n. Demostremos en primer lugar el teorema para el producto de dos factores variables x e y. Supongamos que x e y tienen como límite los números a y b respectivamente. Se tiene (según la fórmula 1, § 51)

$$x = a + \alpha,$$
$$y = b + \beta,$$

donde α y β son infinitésimos. Multiplicando estas igualdades hallaremos que la variable (xy) es igual al número (ab) más el infinitésimo $(\alpha b + a\beta + \alpha\beta)$, es decir, $xy = ab + (ab + a\beta + \alpha\beta)$. Por eso (§ 51), ab, es el límite de la variable xy.

$$\lim (x \cdot y) = a \cdot b$$

o

$$\lim (x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y,$$

que es lo que se trataba de demostrar.

Aplicando lo demostrado hallaremos el límite del producto de tres factores variables x, y y z, cada uno de los cuales tiene límite:

$$\lim (x \cdot y \cdot z) = \lim [(xy) \cdot z] = \lim (xy) \cdot \lim z = \lim x \cdot \lim y \cdot \lim z,$$

porque

$$\lim (xy) = \lim x \cdot \lim y.$$

2°. C o n s e c u e n c i a 1. *El factor constante se puede sacar fuera del signo del límite.*

En efecto, considerando al número constante c como una magnitud variable, cuyos valores son idénticos e iguales a c, se tiene:

$$\lim c = c,$$
$$\lim (c \cdot x) = \lim c \cdot \lim x = c \cdot \lim x.$$

3°. C o n s e c u e n c i a 2. *El límite de la potencia entera y positiva de la magnitud variable será igual a la misma potencia del límite de la magnitud variable, si este límite existe.*

Supongamos que el exponente n de la potencia x^n es un número entero y positivo. Se tendrá:

$$\lim (x^n) = \lim \overbrace{(x \cdot x \cdots x)}^{n \text{ veces}} = \overbrace{\lim x \cdot \lim x \cdots \lim x}^{n \text{ veces}} = (\lim x)^n$$

§ 55. El límite del cociente

1°. L e m a. *Si la magnitud variable x tiene un límite a distinto de cero, $\frac{1}{x}$ es una magnitud acotada.*

D e m o s t r a c i ó n. Según la condición $\lim x = a \neq \neq 0$. Por lo tanto (§ 50), si $a > 0$, entonces $0 < a - -\varepsilon < x < a + \varepsilon$, y si $a < 0$, $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon < 0$. Por lo tanto, siempre será

$$\frac{1}{a+\varepsilon} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a-\varepsilon},$$

lo que significa que $\frac{1}{x}$ es una magnitud acotada.

2°. T e o r e m a. *Si el dividendo y el divisor variables tienen límites y el límite del divisor no es igual a cero, resultará que el límite del cociente es real y igual al cociente de los límites del dividendo y del divisor*, es decir, si

$$\lim x = a, \ \lim y = b, \text{ entonces } \lim \frac{y}{x} = \frac{b}{a}.$$

D e m o s t r a c i ó n. Demostraremos que la diferencia $\frac{y}{x} - \frac{b}{a}$ es un infinitésimo. Esto significa que $\lim \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$. Supongamos que α y β son infinitésimos tales que (§ 51)

$$x = a + \alpha, \ y = b + \beta.$$

En este caso

$$\frac{y}{x} - \frac{b}{a} = \frac{b+\beta}{a+\alpha} - \frac{b}{a} = \frac{\beta a - \alpha b}{a(a+\alpha)} =$$
$$= (\beta a - \alpha b) \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a+\alpha} = (\beta a - \alpha b) \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x}.$$

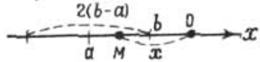
Ya que $\beta a - \alpha b$ es un infinitésimo, $\frac{1}{a}$ es un número; $\frac{1}{x}$ una magnitud acotada; por eso el producto $(\beta a - \alpha b) \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x}$ es una magnitud infinitamente pequeña (§ 46, 4°).

3°. C o n s e c u e n c i a. *Si la variable x tiene un límite $a \neq 0$, entonces el límite $\frac{1}{x}$ existe y es igual a $\frac{1}{a}$.*

§ 56. El signo de la magnitud variable y de su límite

T e o r e m a 1. *El límite de una variable positiva (si existe), o es positivo o es igual a cero.*

D e m o s t r a c i ó n p o r r e d u c c i ó n a l a b s u r d o. Supongamos que el límite de x es el número negativo a. Entre el número negativo a y cero se encuentra una infinidad de números negativos. Tomemos uno de estos, b, cercano a a, y tracemos en el eje Ox (fig. 65), un entorno del punto a de radio igual a la diferencia $b - a$. Cualquier número de este entorno es negativo. Como $\lim x = a$, a partir de cierto momento los valores de x pertenecerán a este entorno, es decir, serán negativos, lo que es absurdo según la condición.



F i g. 65

Ahora bien, si el límite de x no puede ser negativo, pero existe, será positivo o igual a cero.

T e o r e m a 2. *El límite de una variable negativa (si existe), o es negativo o es igual a cero.*

La demostración es análoga a la expuesta.

§ 57. Síntomas de existencia de límite de una magnitud variable

T e o r e m a 1. *Si dos magnitudes variables tienen un límite común, la variable comprendida entre estas magnitudes, tiene el mismo límite.*

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que

$$y \leqslant x \leqslant z,$$

y que $\lim y = \lim z = a$.

Tracemos en Ox (fig. 66) un entorno 2ε del punto a. A partir de cierto momento, los valores de y y z pertenecerán a este entorno y los valores de x pertenecerán al segmento NP, cuyos extremos son N (y) y P (z). Por ello, los valores de x pertenecerán también al entorno 2ε del punto a, y por consiguiente, $\lim x = a$.

F i g. 66

T e o r e m a 2. *Una magnitud variable tiene límite si es creciente, pero se mantiene menor que cierto número;*

una variable tiene también límite si es decreciente, pero se mantiene mayor que cierto número.

La demostración de este teorema rebasa los límites de nuestro curso.

§ 58. Acerca del cociente de magnitudes infinitamente pequeñas

1°. *El cociente* $\frac{\alpha}{x}$, *obtenido al dividir una magnitud infinitamente pequeña* α *por una variable* x, *que tiene límite* a, *distinto de cero, es una magnitud infinitamente pequeña*, puesto que el cociente $\frac{\alpha}{x}$ puede ser considerado como el producto

$$\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\alpha,$$

es decir, como el producto de una magnitud acotada $\frac{1}{x}$ (§ 46, 4°) por un infinitésimo α.

2°. *El cociente* $\frac{x}{\alpha}$, *obtenido al dividir la variable* x, *que tiene límite* a, *distinto de cero, por el infinitésimo* α, *es infinito.*

En efecto, el cociente $\frac{x}{\alpha}$ puede ser considerado como una magnitud recíproca a $\frac{\alpha}{x}$. Según lo anterior, $\frac{\alpha}{x}$ es un infinitésimo, y el recíproco, $\frac{x}{a}$, es una magnitud infinitamente grande.

3°. Si el dividendo α y el divisor β son magnitudes infinitamente pequeñas, no se puede aplicar el teorema acerca del límite del cociente, ya que tendríamos:

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\lim\alpha}{\lim\beta}=\frac{0}{0},$$

sin embargo, no se puede dividir cero por cero.

Debe indicarse que el límite del cociente obtenido al dividir magnitudes infinitamente pequeñas puede no existir.

La solución de problemas técnicos muy importantes (como se verá en el capítulo VI) se reduce a encontrar el límite del cociente obtenido al dividir magnitudes infinitamente pequeñas, y el cálculo de este límite es uno de los problemas del análisis.

§ 59. Ejemplos de cálculo de límites

1°. Hallar el límite del quebrado $\frac{2-3x+x^2}{x^2-2x+3}$ si $x \to 2$.

Solución. Aplicando los teoremas del límite del cociente, luego, de la suma algebraica, de la constante, del producto y de la potencia se obtiene:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2+3x-x^2}{x^2-2x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2+3x-x^2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+3)}=$$

$$=\frac{2+3\lim\limits_{x\to 2}x-(\lim\limits_{x\to 2}x)^2}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-2\lim\limits_{x\to 2}x+3}=\frac{2+3\cdot 2-2^2}{2^2-2\cdot 2+3}=\frac{0}{3}=0.$$

Como se ve, el cálculo del límite del quebrado se redujo al cálculo e su valor para $x=2$.

2°. Hallar el límite del quebrado $\frac{x^2+5x+6}{x^3+x}$ si $x \to 0$.

si $x \to 0$.

Solución. *Indiquemos que el límite del denominador*

$$\lim_{x\to 0}(x^3+x)=0.$$

Por lo tanto, no podemos aplicar el teorema del límite del cociente. Para establecer qué magnitud variable representa el quebrado dado cuando $x \to 0$, hallemos el límite de su numerador:

$$\lim_{x\to 0}(x^2+5x+6)=0+5\cdot 0+6=6.$$

El quebrado dado, si $x \to 0$, es el cociente de una variable, que tiene límite, igual a 6, por un infinitésimo (§ 49,6°) y por eso (§ 58,2°), el límite del quebrado dado es infinito.

Aclaremos si conserva el quebrado dado un mismo signo estando cerca del punto $x=0$ (§ 50,7°). En un entorno del punto $x=0$ de radio igual, por ejemplo, a uno,

$$\text{si } x>0, \text{ entonces } \frac{x^2+5x+6}{x^3+x}>0,$$

$$\text{y cuando } x<0 \ \frac{x^2+5x+6}{x^3+x}<0.$$

Por esto, si x tiende a cero en forma arbitraria, el quebrado dado no tiene límite finito, y tampoco infinito.

Si, en particular, la aproximación de x a cero es tal, que siempre $x>0$, el quebrado tiene el límite infinito $+\infty$, y si siempre $x<0$, el quebrado tiene el límite infinito $-\infty$.

3°. Hallar el límite del quebrado $\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$, si $x \to 2$.

Solución. El límite del denominador es $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-5x+2)=$ $=2\cdot 2^2-5\cdot 2+2=0$, y el del nominador, $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)=2^2-$

$-3\cdot2+2=0$. De este modo, el problema consiste en hallar el límite de la razón de infinitésimos.

Veamos si el quebrado dado es reducible o irreducible. Descomponiendo el trinomio cuadrático en factores $\Bigl($las raíces del numerador son 2 y 1; *las del denominador*, 2 y $\frac{1}{2}\Bigr)$, se ve que *el quebrado es reducible*:

$$\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}=\frac{(x-2)(x-1)}{2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{x-1}{2x-1}.$$

Se obtiene:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-3x+2}{2x^2-5x+2}=\lim_{x\to2}\frac{x-1}{2x-1}=\frac{2-1}{2\cdot2-1}=\frac{1}{3}.$$

4°. Hallar el límite del quebrado $\frac{x^2-5}{3x^2+8}$, si $x\to+\infty$

S o l u c i ó n. Si $x\to+\infty$, el numerador y el denominador son magnitudes infinitamente grandes. Por lo tanto, hay que hallar el límite de la razón de magnitudes infinitamente grandes.

Transformando *el quebrado dado, se puede evitar el análisis* de magnitudes infinitamente grandes. En efecto, dividamos el numerador y el denominador por x^2:

$$\frac{x^2-5}{3x+8}=\frac{1-\frac{5}{x^2}}{3+\frac{8}{x^2}}.$$

Si $x\to+\infty$, los quebrados $\frac{5}{x^2}$ y $\frac{8}{x^2}$ son infinitésimos, su límite es igual al cero. Por eso,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5}{3x^2+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x^2}}{3+\frac{8}{x^2}}=\frac{1-0}{3+0}=\frac{1}{3}.$$

5°. Hallar el límite de la suma $\frac{x-3a}{x^2-a^2}+\frac{1}{x-a}$, si $x\to a$.

S o l u c i ó n. Si $x\to a$, $\lim\limits_{x\to a}(x^2-a^2)=a^2-a^2=0$, $\lim\limits_{x\to a}(x-a)=a-a=0$. El teorema del límite del cociente no se puede aplicar.

Sumemos los quebrados:

$$\frac{x-3a}{x^2-a^2}+\frac{1}{x-a}=\frac{x-3a+x+a}{(x-a)(x+a)}=\frac{2(x-a)}{(x-a)(x+a)}=\frac{2}{x+a}.$$

Si $x\to a$, el teorema del límite del cociente puede aplicarse a $\frac{2}{x+a}$. Por lo tanto se obtiene:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x-3a}{x^2-a^2}+\frac{1}{x-a}\right)\lim_{x\to a}\frac{2}{x+a}=\frac{2}{a+a}=\frac{1}{a}.$$

CAPITULO V

LA FUNCION Y SU CONTINUIDAD

§ 60. El argumento y la función

1°. De las matemáticas elementales es sabido que *una magnitud es función de otra, a la cual se la llama su argumento, si a cada valor (admisible)* * *del argumento le corresponde un valor determinado único.*

Por ejemplo: la longitud del vástago metálico es una función de su temperatura, ya que a cada valor de la temperatura, a la que puede existir el vástago, le corresponde un valor determinado único de su longitud; el camino, recorrido por un cuerpo en movimiento, es una función del tiempo de movimiento del cuerpo, ya que a cada valor del tiempo de movimiento del cuerpo, le corresponde un valor determinado del camino recorrido por éste; el área del círculo es una función de su radio, ya que a cada valor del radio del círculo le corresponde un área determinada del círculo.

Designemos la función por la letra y y su argumento, por x. Ya que nos interesarán problemas que pueden aplicarse a diferentes magnitudes concretas, *supongamos que el sentido concreto de las magnitudes* x y y *nos será indiferente y haremos abstracción de él.* Precisamente así se estudian la función y y el argumento x, cuando en el álgebra se estudian la proporcionalidad directa e inversa $y = kx$, $y = \frac{k}{x}$, la función lineal $y = kx + b$, la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, la función exponencial $y = a^x$, y otras. Es evidente, que en tal caso, las conclusiones de las soluciones de los problemas pueden luego aplicarse a diferentes magnitudes concretas.

De esta forma, la función y de x (función numérica), está definida por multitud de valores del argumento x y de

* Se llaman "admisibles" a los valores del argumento para los cuales los valores de la función son números reales.

la ley, en razón de la cual a cada valor de x corresponde un determinado y único valor de y. Se dice que *en el conjunto dado de valores de x está determinada la función y de x, si está dada una ley, en razón de la cual a cada número del conjunto dado de valores de x le corresponde un número único, llamado valor de y.*

Tengamos en cuenta, que como valores de la función y del argumento, se sobreentienden números reales, y nunca números complejos o imaginarios.

2°. El conjunto de valores del argumento, en el cual está determinada la función, se llama *campo de definición de la función*. En otras palabras, el campo de definición de la función es el conjunto de los números x para cada uno de los cuales existe uno y sólo un número real, que, es el valor de y.

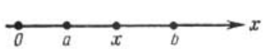


Fig. 67

En particular, puede ser campo de definición de la función un *segmento*, o *intervalo*, o su *conjunto*.

Se llama segmento al conjunto de los números reales de x que satisfacen las condiciones:

$$a \leqslant x \leqslant b, \text{ donde } a < b.$$

El segmento $a \leqslant x \leqslant b$ se indica abreviadamente $[a, b]$. Geométricamente, el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ representa el conjunto de puntos que pertenecen al segmento ab del eje numérico Ox (fig. 67), incluyendo también los extremos a y b del segmento.

Se llama intervalo al conjunto de todos los números reales de x que satisfacen a las dos desigualdades:

$$a < x < b.$$

El intervalo $a < x < b$ se indica abreviadamente (a, b).

Geométricamente, el intervalo $a < x < b$ representa el conjunto de puntos del eje numérico (fig. 67), que se encuentran comprendidos entre los puntos $x = a$ y $x = b$, pero los puntos $x = a$ y $x = b$ en el intervalo (a, b) no se incluyen.

El conjunto de todos los números reales de x se expresa por medio de la desigualdad:

$$-\infty < x < +\infty.$$

3°. E j e m p l o s. **1.** El campo de definición de la función $y = \text{arc sen } x$ es el segmento $-1 \leqslant x \leqslant +1$, ya que sólo para estos valores de x son posibles los valores de y.

2. El conjunto de todos los números enteros n del intervalo $2 < n < +\infty$ sirve de campo de definición de la función $P = 2Rn \text{ sen } \frac{180}{n}$, en la que P es el perímetro de un polígono regular de n vértices inscrito en un círculo.

3. El campo de definición de la función $y = \frac{x}{x^2-1}$ lo forman tres intervalos: $-\infty < x < -1$, $-1 < x < +1$ y $+1 < x < +\infty$. Asimismo, se dice que la función $y = \frac{x}{x^2-1}$ *está determinada en los intervalos:*

$$-\infty < x < -1, \quad -1 < x < +1 \quad y +1 < x < +\infty$$

Si $x = \pm 1$, el denominador $x^2 - 1$ se hace cero y la expresión $\frac{x}{x^2-1}$ pierde el sentido, ya que no se puede dividir por cero.

4. La expresión $y = \sqrt{-1-x^2}$ no determina a la función ya que al sustituir x por *cualquier número real, resulta* siempre un número imaginario.

4°. La definición de la función no exige que al variar el valor del argumento x varíe también el valor de y. Es *suficiente que para cada valor admisible de x exista un* valor completamente determinado de y.

E j e m p l o. Supongamos que y es la cantidad indicada por un contador de electricidad y x, el tiempo. La y es fun*ción de x, porque para cada instante de tiempo x, el contador* determina la cantidad gastada de energía eléctrica y. La función y permanece invariable en los intervalos de tiempo en los que no se gasta energía.

Es, *pues, natural imaginarse una función así:*

$$y = c,$$

que no experimenta cambio alguno; todos los valores de esta función son en realidad un mismo número c. La gráfica de esta función es una recta paralela al eje Ox, o que coincide con el eje Ox si $c = 0$.

5°. La definición de la función suele atribuirse a Dirichlet. Sin embargo, unos años antes de que lo hiciera Dirichlet, el genial matemático ruso N. Lobachevski definió la función en el artículo *Acerca de la desaparición de las líneas trigonométricas*, publicado en 1834.

§ 61. Notación general de la función

1°. El hecho de que el valor de y sea una función determinada de x se expresa por la igualdad:

$$y = f(x)$$

y se lee: "y es igual a f de x" o "y es función f de x". La letra f simboliza aquí la dependencia de y respecto a x, es decir, la ley en virtud de la cual a cada número del conjunto dado de valores de x le corresponde un número real que es el valor de y.

De acuerdo con la notación $y = f(x)$, el hecho de que la longitud de la varilla l sea función de la temperatura t se expresa:

$$l = f(t);$$

el hecho de que el área del círculo s es la función de su radio r, se expresa:

$$s = \varphi(r).$$

En el segundo caso, para expresar la dependencia de s respecto a r se ha empleado el símbolo φ en lugar del símbolo f, porque la ley de la dependencia de s respecto a r es distinta que la ley de la dependencia de l respecto a t:

$$f(t) = l_0(1 + \alpha t), \text{ y } \varphi(r) = \pi r^2.$$

Por lo tanto, los símbolos $f(x)$, $\varphi(x)$, $F(x)$ expresan distintas funciones de un mismo argumento x.

Los símbolos $f(x)$, $f(t)$, $f(z)$, expresan una misma función de diferentes argumentos.

E j e m p l o s:

$$1)\ f(x) = \frac{c}{x}; \quad f(t) = \frac{c}{t},$$

$$2)\ f(x) = \operatorname{sen} x; \ f(z) = \operatorname{sen} z.$$

2°. El valor numérico de la función $f(x)$ respecto al valor dado del argumento x se indica de la siguiente manera: en la notación $f(x)$ la x se sustituye por su valor numérico.

Por ejemplo, las notaciones $f(2)$ y $f(a)$ significan valores de la función $f(x)$ siendo $x = 2$ y $x = a$.

Si $f(x) = x^2$, entonces $f(2) = 2^2 = 4$, $f(a) = a^2$.

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

§ 62. Acerca de la representación tabular, gráfica y analítica de la función

1°. Al realizar experimentos, y, en general, al hacer observaciones, se hace uso de la tabulación de la función, o sea la representación en forma de tabla con sus correspondientes valores funcionales.

valor de x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
valor de y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

donde $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$.

Así se tabulizan las funciones numéricas, de valores que frecuentemente son utilizados en cómputos y cálculos. En los manuales técnicos se puede encontrar frecuentemente tablas de logaritmos, magnitudes trigonométricas naturales, de valores x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}\,\frac{1}{x}$, $\frac{\pi x^2}{4}$ y otros. Estas tablas se llaman tablas *matemáticas*, a diferencia de las tablas dadas por los resultados de experiencias que se llaman tablas *empíricas*.

2°. Se sabe, que *la gráfica de la función implícita $y = f(x)$ se llama lugar geométrico de los puntos $(x, f(x))$.*

Cualquier línea trazada en el plano en el sistema cartesiano de coordenadas xOy, podrá ser considerada como gráfica de la función $y = f(x)$ si en una recta paralela al eje Oy, se encuentra no más que un punto de la línea.

En la ciencia y en la técnica frecuentemente las funciones se determinan por gráficas, que trazan los aparatos registradores. La determinación del valor $f(x)$, que corresponde al valor de x se efectúa así:

1) en el eje Ox se señala el punto x (fig. 68, *a*);

2) por el punto x se traza una recta paralela a Oy, hasta el encuentro con la línea dada en el punto M (fig. 68, *b*);

3) desde el punto M se traza una recta paralela a Ox hasta el encuentro con el eje Oy en el punto $f(x)$ (fig. 68, c).

Al hacer estas tres operaciones se obtiene la *transformación* del punto x en el punto $f(x)$. Al número x se le pone

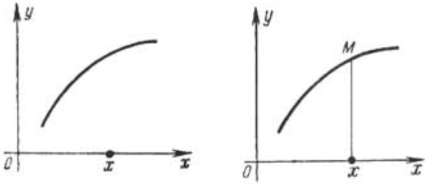


Fig. 68 a,б

en correspondencia el número $f(x)$, que es el valor de la función, y se determina éste como la ordenada del punto $f(x)$.

3°. Si la dependencia funcional está expresada por una fórmula, se dice que la función está definida analíticamente.

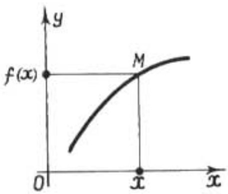


Fig. 68 c

Por ejemplo, en la fórmula del área de un círculo

$$s = \pi r^2,$$

el área s es función del radio r, definida analíticamente.

Para definir analíticamente una misma función, a veces es necesario emplear no una, sino varias fórmulas diferentes. Por ejemplo, la cantidad señalada por un contador de electricidad al empezar el día era 20 kW, y durante las 24 horas se ha gastado la siguiente energía: desde las 5 hasta las 8 de la mañana, 60 W para cada una de las 5 bombillas, y desde las 17 hasta las 24, otros 60 W para cada una de las 5 bombillas, y 100 W para un receptor de radio. Indicando la cantidad señalada por el contador por medio de y, y el tiempo por medio de x, se obtiene la ecuación de la dependencia de y respecto a x:

$$y = \begin{cases} 20, & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 5; \\ 20 + 0{,}3\,(x - 5), & \text{si} \quad 5 \leqslant x \leqslant 8; \\ 20{,}9, & \text{si} \quad 8 \leqslant x \leqslant 17; \\ 20{,}9 + 0{,}4\,(x - 17), & \text{si} \quad 17 \leqslant x \leqslant 24. \end{cases}$$

4°. La función se llama *explícita* si la fórmula que define la función señala las operaciones matemáticas que se efectúan con el argumento para determinar la función y; en caso contrario, se llama función *implícita*.

Ejemplos: 1) $y = ax^2$, $y = f(x)$ son funciones explícitas.

2) $y^2 - x = 0$, $F(x, y) = 0$ son funciones implícitas.

5°. Para la función explícita, representada en forma de ecuación, $y = f(x)$ generalmente se construye su gráfica. La gráfica da una representación ilustrativa acerca de las propiedades de la función. Lo fundamental para la construcción de la gráfica tiene que ser el estudio del proceso de variación de la función. Los métodos de análisis *de función serán expuestos más abajo* (cap. t. VIII). Ahora para la construcción de la gráfica de la función dada, vamos a operar con aquellas nociones que tenemos del curso escolar de matemáticas y de los capítulos anteriores de nuestro curso.

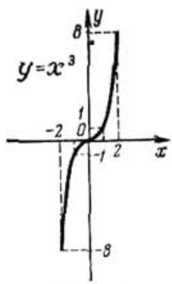


Fig. 69

Ejemplo. 1. Construir la gráfica de la función $y = x^3$

Solución. El campo de existencia de la función es $-\infty < x < +\infty$, por otra parte para los valores positivos de x, la función x^3 será positiva, y para valores negativos será negativa. Cuando crece x, la función x^3 es creciente, $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

Daremos unos valores a x y calcularemos por la fórmula $y = x^3$ los valores correspondientes de y. Tengamos por ejemplo la siguiente tabla de valores:

x	$-\infty \ldots$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$\ldots \quad +\infty$
y	$-\infty \ldots$	-8	$-3\frac{3}{8}$	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$3\frac{3}{8}$	8	$\ldots \quad +\infty$

Construyendo los puntos con ayuda de esta tabla, trazaremos por ellos una línea contínua y densa, que puede descender y ascender sin límite (fig. 69). Se obtiene (aproximadamente) la gráfica de la función dada.

Ejemplo 2. Construir la gráfica de la función $y = \frac{x^2}{x^2+4}$.

Solución. Igualando el denominador $x^2+4=0$, hallamos:

$x=\pm\sqrt{-4}$, lo que significa que el campo de definición de la función es $-\infty < x < +\infty$.

Ya que x aparece en la fórmula solamente al cuadrado y $x^2 \geqslant 0$, entonces $\frac{x^2}{x^2+4}=y\geqslant 0$, y como $x^2 < x^2+4$, $\frac{x^2}{x^2+4}=y<1$. Lo que significa que $0\leqslant y<1$.

Ya que $(-x)^2=(+x)^2$, entonces a los valores $-x$ y $+x$ corresponde el mismo valor de y, por consiguiente, y la gráfica es

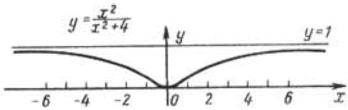


Fig. 70

una curva simétrica con respecto al eje Oy. Tenemos $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+4}=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{4}{x^2}}=1$. Esto significa que la recta $y=1$ es asíntota de las ramas izquierda y derecha de la curva.

Dando valores a x, hallaremos por la fórmula $y=\frac{x^2}{x^2+4}$ la abla de valores y. Por ejemplo se obtiene

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	...	$\to\pm\infty$
y	0	0,2	0,5	$\sim 0,69$	0,8	$\sim 0,86$	0,9	...	$\to 1$

Construiremos de acuerdo con esta tabla los puntos y trazaremos a trávés de ellos una curva continua, que será (aproximadamente) la gráfica de la función dada (fig. 70).

§ 63. El incremento del argumento y de la función

1°. Tomemos arbitrariamente en el campo de definición de la función $y=f(x)$ dos valores del argumento. Al primero lo llamamos inicial, y al segundo, incrementado.

El valor inicial de x se considera constante durante todo el razonamiento, y el punto A (fig. 71), que le corresponde en el eje Ox, se considera fijo. El valor incrementado del argumento se designa por $x+\Delta x$; en la fig. 71 le corresponde el punto P.

Δx expresa la magnitud en la que varía el argumento al pasar del primer valor al segundo, y se le llama incremento del argumento.

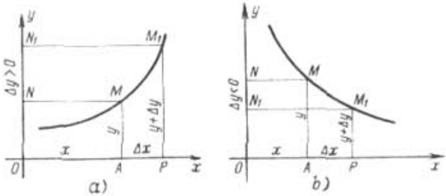


Fig. 71

Δx es igual a la diferencia entre el segundo y el primer valor del argumento.

E j e m p l o s. 1. Se han tomado dos valores de x:

$$3{,}0 \text{ y } 3{,}1;\ \Delta x=3{,}1-3{,}0=0{,}1.$$

2. Se han tomado dos valores de x:

$$5 \text{ y } 4{,}8;\ \Delta x=4{,}8-5=-0{,}2.$$

3. Se han tomado dos valores de x:

$$-1 \text{ y } -0{,}98;\ \Delta x=-0{,}98-(-1)=0{,}02.$$

2°. A los valores de x y $x+\Delta x$ del argumento corresponden determinados valores de la función: el inicial y y el incrementado $y+\Delta y$. *Δy es la magnitud en la que varía el valor de la función y al variar el argumento en la magnitud Δx, y se llama incremento de la función.*

Δy es igual a la diferencia entre el segundo y el primer valor de la función.

Hallemos los puntos $M(x,\ y)$ y $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ de la gráfica de la función $y=f(x)$ (fig. 71). $\Delta y=NN_1=$ $=ON_1-ON$. *Geométricamente, el incremento de la función Δy es la diferencia de las ordenadas de los puntos de la gráfica de la función que corresponden a los valores incrementado e inicial del argumento.*

El incremento de la función Δy puede ser positivo o negativo. Cuando Δy es positivo, el segmento $NN_1=\Delta y$ está situado en el eje de ordenadas (fig. 71,*a*) más arriba del punto fijo N, cuando Δy es negativo, está situado más abajo de ese punto (fig. 71.*b*).

3°. Ejemplos. 1. ¿En cuánto variará el área y de un cuadrado, si la longitud de su lado x se incrementa en Δx?

Solución. El área del cuadrado es:

$$y=x^2.$$

Si la longitud del lado del cuadrado es $x+\Delta x$, su área será $y+\Delta y$, e

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2.$$

Restando el valor de la primera área del de la segunda, se tiene:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2.$$

Abriendo los paréntesis vemos que el área variará en:

$$\Delta y=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2.$$

Si, por ejemplo, el lado del cuadrado aumenta de 3 a 3,1 metros, el área del cuadrado aumentará en:

$$\Delta y=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2=2\cdot 3\cdot 0{,}1+0{,}1^2=0{,}61\ (m^2),$$

por que $x=3m$ y $\Delta x=0{,}1\ m$

2. Hallar el incremento Δy de la función $y=\frac{1}{x}$ que corresponde al incremento arbitrario Δx del argumento x.

Solución. Para el valor del argumento igual al número x, la función tiene el valor

$$y=\frac{1}{x},$$

y para el valor del argumento igual al número $x+\Delta x$, la función tiene el valor

$$y+\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}.$$

Restando la primera igualdad de la segunda, hallamos el incremento de la función:

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

Al aumentar el argumento x, por ejemplo, de 4 a 4,5, la función recibe un incremento:

$$\Delta y=-\frac{0{,}5}{4\cdot 4{,}5}=-\frac{1}{36}$$

(porque $x=4$, $x+\Delta x=4{,}5$ y $\Delta x=0{,}5$), es decir, disminuirá en $\frac{1}{36}$.

4°. Hállese la expresión del incremento de la función $f(x)$, que está condicionado al cambió del valor del argumento x en la magnitud Δx.

El valor inicial de la función es

$$y = f(x),$$

y el valor incrementado de ésta

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Al restar, encontramos que el incremento de la función

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{I}$$

§ 64. Resumen de propiedades y de las gráficas de las funciones elementales básicas

1°. Las funciones estudiadas en la álgebra y trigonometría son:

1) $y = x^a$, donde a es un número dado;

2) exponencial, $y = a^x$, en la que $a > 0$, $a \neq 1$, $-\infty < x < +\infty$;

3) logarítmica, $y = \log_a x$, donde $a > 0$, $a \neq 1$; $0 < x < +\infty$;

4) trigonométricas; sen x, cos x, tg x, cotg x;

5) trigonométricas inversas: arc sen x, arc cos x, arc tg x, arc cotg x, ... etc. y que se denominan *funciones elementales básicas*.

La función $y = x^a$, donde a es un número irracional, y otras enumeradas anteriormente: exponencial, logarítmica, trigonométricas y trigonométricas inversas se llaman *funciones trascedentales básicas* *.

Se llaman también funciones elementales todas las funciones formadas de las funciones básicas por medio de un cierto número de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y del empleo de los signos de las funciones elementales básicas.

Por ejemplo,

$$f(x) = \sqrt{\frac{\arccos x - \sqrt{\operatorname{sen} x}}{\lg(1 - 3^{\operatorname{tg} x})}}$$

es una función elemental.

* Estas funciones se llaman trascendentales porque no pueden ser expresadas por ecuaciones algebraicas.

Estudiaremos las propiedades y las gráficas de las funciones elementales más sencillas y básicas.

2°. Si la función y de x posee tal propiedad, que *la relación* $\frac{y}{x}$ *es constante e igual a* k,

$$\frac{y}{x}=k,$$

entonces la dependencia entre y *y* x *se llama dependencia directamente proporcional* y se expresa por la fórmula

$$y=kx,$$

el número k *se llama coeficiente de la proporcionalidad directa.*

La gráfica de la proporcionalidad directa $y=kx$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

3°. Si la función y de x posee la propiedad de que *el producto* xy *es una constante igual a* k, $xy=k$,

entonces esta dependencia entre y *y* x *se llama dependencia inversamente proporcional y el número* k, *coeficiente de la proporcionalidad inversa.*

La gráfica de la proporcionalidad inversa es una hipérbola equilátera $xy=k$, situada en el primer y tercer cuadrante para $k>0$, y en segundo y cuarto cuadrantes para $k<0$.

Se puede notar también que la proporcionalidad inversa entre y y x se caracteriza en que *al variar una de ellas en cierto valor, varía en un valor inverso la otra*, o sea, si, por ejemplo,

$$x_2=mx_1, \text{ entonces } y_2=\frac{y_1}{m}.$$

Y en efecto, solamente en tal caso el producto

$$x_2y_2=mx_1\cdot\frac{y_1}{m}=x_1y_1=k.$$

4°. *La función expresada por medio de la ecuación:*

$$y=kx+b,$$

se llama lineal y su gráfica es una línea recta.

Hallemos el incremento Δy de la función lineal condicionada por el incremento Δx del argumento:

$$\Delta y=k(x+\Delta x)+b-(kx+b), \text{ o}$$

$$\boxed{\Delta y=k\cdot\Delta x} \qquad (1)$$

Esta igualdad expresa la propiedad fundamental de la función lineal: *el incremento de la función lineal es directamente proporcional al incremento de su argumento* y no depende del valor inicial del argumento.

En particular, a iguales incrementos Δx, para diferentes valores iniciales de x, le corresponden iguales incrementos Δy (fig. 72)

Ninguna otra función posee esta propiedad.

Demostremos que *cualquier función $y = f(x)$, cuyo incremento Δy es directamente proporcional al incremento Δx de su argumento, es una función lineal.*

De (1) se deduce que:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = k,} \qquad (2)$$

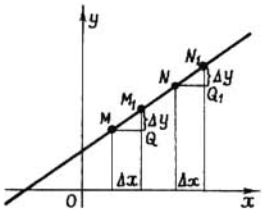


Fig. 72

es decir, *la razón del incremento de la función lineal $y = kx + b$ en cualquier punto x respecto al incremento del argumento x tiene un mismo valor, igual a k.*

Si para todos los valores de x, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiene un mismo valor, la variación de y se llama *uniforme* y la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se llama *velocidad* de variación de y.

La variación de la función lineal es uniforme, y la velocidad de esta variación es numéricamente igual al coeficiente angular k de la gráfica de la función dada.

5°. *La función y de x, expresada por la relación de los binomios $ax + b$ y $cx + d$, donde $c \neq 0$,*

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

se llama función linealmente racional.

Si $c = 0$, $y = \frac{ax + b}{0 \cdot x + d} = \frac{a}{d} x + \frac{b}{d}$ es función lineal.

Si $a = 0$ y $d = 0$, $y = \frac{b}{cx}$ ó $xy = \frac{b}{c}$, es decir, si $a = 0$ y $d = 0$, la función linealmente racional expresa la proporcionalidad inversa entre y y x. La función $y = \frac{k}{x}$ es una forma particular de la función linealmente racional.

La gráfica de la función linealmente racional es una hipérbola equilátera con centro en $O'\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$, y con asíntotas paralelas a los ejes de coordenadas del sistema xOy (§ 35, 5°) (fig. 73).

6°. *La función de potencia $y = x^a$ es la potencia del argumento de x, el exponente de la cual a es número dado.*

Son posibles los siguientes casos: 1) cuando a es un número racional, 2) cuando a es un número irracional.

En el primer caso, la función de potencia es algebraica.

Notemos, que la función $y = f(x)$ se llama *algebraica*, si sus valores surgen como resultado de operaciones algebraicas efectuadas con los valores de x y de números dados, es decir, de adición, sustracción, multiplicación, división, elevación a potencia entera y positiva, y extración de raíces, con índice entero y positivo.

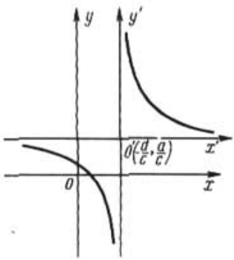


Fig. 73

Si el exponente a es un número entero y positivo ($y = x^2$, $y = x^3$ etc.), entonces $y = x^a$ es función entera y definida para todos los valores de x.

Si el exponente a es un número entero y negativo, entonces $y = x^a$, es función racional $\left(y = x^{-1} = \frac{1}{x},\ y = x^{-2} = \frac{1}{x^2},\ y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}, \ldots, \text{etc.}\right)$ y definida para todos los números positivos y negativos, y para $x = 0$ es indefinida.

Si el exponente a es un quebrado irreducible, $a = \frac{p}{q}$, donde p y q son números naturales, y además $q > 1$, entonces $y = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ es una función irracional. Aquí es posible:

1) que q sea igual a un número impar; 2) que q sea igual a un número par. Para un valor impar de q la funcion $y = x^{\frac{p}{q}}$ está definida para todos los valores de x, pero para un valor par de q la función $y = x^{\frac{p}{q}}$ está definida solamente para

valores positivos de x, en este caso se entiende que la raíz $\sqrt[q]{x^p}$ es aritmética.

En la figura 74 se representan las gráficas de la función $y = x^a$ para $a = 3; 4; -2; -3; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{1}{3}$.

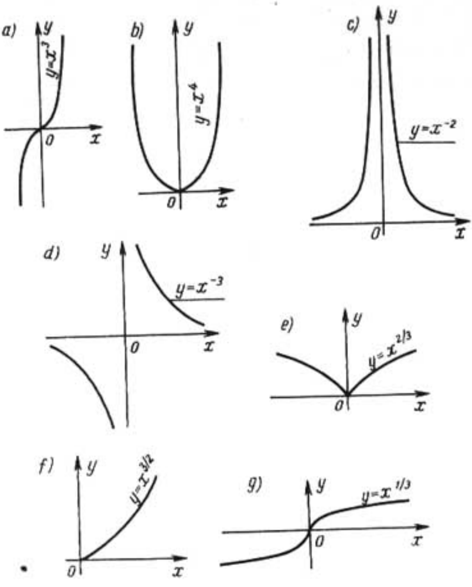


Fig. 74

En el segundo caso, cuando a es un número irracional, lo designaremos con la letra α. La función de potencia $y = x^{\alpha}$ (por ejemplo, $y = x^{\pi}$, $y = x^{\sqrt{2}}$) es función trascendental; esta función se estudia solamente en caso de valores positivos de x, y los de la función son números positivos, $x^{\alpha} > 0$.

7°. Funciones monótonas.

Definiciones. 1. *La función $f(x)$ se llama creciente si para dos valores diferentes cualesquiera del argumento x,* *al valor mayor del argumento x le corresponde un valor mayor de la función, es decir,*

$$para\ x_1 < x_2,\ se\ tiene\ f(x_1) < f(x_2).$$

2. *La función $f(x)$ se llama decreciente si para dos valores cualesquiera diferentes del argumento x, al valor mayor del argumento corresponde un valor menor de la función, es decir,*

$$para\ x_1 < x_2,\ se\ tiene\ f(x_1) > f(x_2).$$

3. *La función $f(x)$ se llama no decreciente si para cualesquiera x_1 y x_2, siendo $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.*

Análogamente, *la función $f(x)$ se llama no creciente si siendo $x_1 < x_2$, se tiene $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.*

De esta suerte, una función no decreciente se distingue de una creciente en que para la función no decreciente es posible la igualdad de los valores de la función en dos valores diferentes del argumento, mientras que para la función creciente no es posible.

4. *Las funciones no decrecientes y no crecientes se llaman monótonas, y las funciones crecientes y decrecientes se llaman estrictamente monótonas.*

8°. F u n c i ó n i n v e r s a. Si la función $y = f(x)$ está definida en cierto intervalo, significa que a cada valor x de este intervalo, le corresponde un único valor de y igual a $f(x)$.

Supongamos, que a cada valor de y del conjunto de valores de la función $y = f(x)$, le corresponda un único valor de x, el mismo valor de x para el cual el valor de la función $f(x)$ es igual al valor dado y. Geométricamente significa que la gráfica de la función $y = f(x)$ corta a la recta paralela al eje de abscisas sólo en un punto.

La ecuación $y = f(x)$ determina en este caso dos funciones: 1) la función explícita $y = f(x)$ y 2) la función implícita x de y, que designaremos con el símbolo $\overline{f}(y)$. La segunda función $x = \overline{f}(y)$ se llama *función inversa* de la función $y = f(x)$.

Es evidente, que la función inversa $\overline{f}(y)$ existe, si para dos diferentes valores del argumento de la función $y = f(x)$ corresponden dos diferentes valores de la función, o sea para cualquier valor x_1 y x_2 del intervalo dado cuando $x_1 \neq x_2$ $f(x_1) \neq f(x_2)$.

De esto se deduce que *cada función rigurosamente monótona tiene función inversa.*

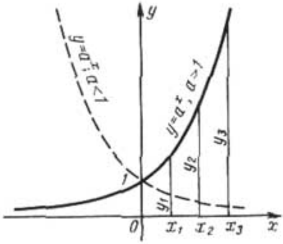
E j e m p l o s. 1) La función $y = x^3$ es creciente en el intervalo $-\infty < x < +\infty$ y tiene función inversa $x = \sqrt[3]{y}$.

2) La función $y = x^2$ es creciente en el intervalo $0 \leq x < +\infty$ y tiene en este intervalo la función inversa $x = -\sqrt{y}$.

G r á f i c a d e l a f u n c i ó n i n v e r s a. La abscisa del punto de la gráfica de toda función, es el valor del argumento, y la ordenada, el valor de la función. Para emplear dicha propiedad en la gráfica de la función inversa, debemos cambiar los lugares de y y x en la ecuación de la función inversa, es decir, obtener la función inversa en la forma $y = \overline{f}(x)$.

Como gráfica de la función inversa siempre se entiende la gráfica de la función $y = \overline{f}(x)$.

En la fig. 74, *a*, *g* se muestran la gráfica de la función $y = x^3$ y gráfica de su función inversa $y = \sqrt[3]{x}$ expuestas en el ejemplo 1.



F i g. 75

9°. *La función exponencial* $y = a^x$, *es la potencia de número positivo a diferente de la unidad, el exponente de la cual x es argumento, es decir, la magnitud variable.*

Se conoce del álgebra que:

1) $y = a^x$ es definida para el conjunto de valores reales $(-\infty < x < +\infty)$, y positiva, $y = a^x > 0$;

2) para $x = 0$, $a^x = 1$;

3) $y = a^x$ es la función rigurosamente monótona: si $a > 1$, es creciente, precisamente, cuando x aumenta en el intervalo $-\infty < x < +\infty$, la función crece en el intervalo $0 < a^x < +\infty$;

si $a < 1$ es la decreciente, precisamente, en caso del aumento de x en el intervalo $-\infty < x < +\infty$, la función decreciente en el intervalo $+\infty > a^x > 0$.

Estas propiedades pueden observarse en la gráfica (fig. 75).

En el proceso de la construcción de la gráfica de la función exponencial conviene utilizar las siguientes propiedades de ésta; hallados los valores de y e y_2 para valores x_1 y x_2. Entonces el valor de la función exponencial para el valor x_3. igual a la suma de $x_1 + x_2$, es igual al producto $y_1 \cdot y_2$.

En efecto, si

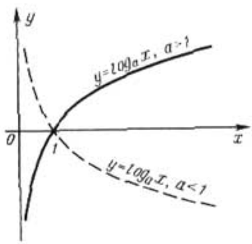
$$y_1 = a^{x_1}, \quad y_2 = a^{x_2},$$

entonces

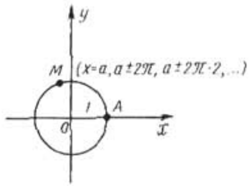
$$y_3 = y_1 \cdot y_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}.$$

Así, a propósito, se explica el progreso impetuoso de la curva $y = a^x$ cuando crece el argumento x $(a > 1)$.

10°. L a f u n c i ó n l o g a r í t m i c a. Como la función exponencial $y = a^x$, en rigor es monótona, posee función inversal a logarítmica: $x = \log_a y$. Nosotros la estudiaremos dándole designaciones corrientes: y es función; x el argumento; o sea $y = \log_a x$.



F i g. 76



F i g. 77

La base a es el número positivo y diferente de la unidad.

Se conoce del álgebra, que:

1) la función $\log_a x$ es definida para el conjunto de números positivos $0 < x < +\infty$;

2) si $x = 1$, $\log_a x = 0$;

3) la función logarítmica es rigurosamente monótona: para $a > 1$ es la creciente, cuando crece x en el intervalo $0 < x < +\infty$ la función crece en el intervalo $-\infty < \log_a x < +\infty$,

además cuando $x < 1$ es negativa, y cuando $x > 1$, positiva;

si a < 1 es la decreciente, cuando x crece en el intervalo $0 < x < +\infty$, decreciente en el intervalo $+\infty > \log_a x > -\infty$, al mismo tiempo si $x < 1$, es positiva, y para $x > 1$, negativa.

Estas propiedades se ven en la gráfica de la función (fig. 76).

11°. Correspondencia entre los valores y los puntos de una circunferencia. Las funciones trigonométricas se estudian en la escuela media como funciones del ángulo (o del arco). Pero ya en el curso escolar de trigonometría se señala que pueden ser consideradas como funciones de argumento numérico. En el análisis matemático como función trigonométrica se entiende siempre función de argumento numérico.

Si en el plano xOy (fig. 77) tenemos una circunferencia O de radio igual a la unidad del sistema xOy, $R = 1$, la llamaremos la *circunferencia de radio 1*.

Considerando el punto arbitrario M de la circunferencia O como final de los arcos, trazados por la rotación del punto desde el origen A, en sentido contrario al de las agujas del reloj o simplemente en el sentido del movimiento, *con el punto arbitrario M de la circunferencia O de radio 1 se ponen en correspondencia los números*

$$X = a + 2\pi k,$$

donde el número $O \leqslant a < 2\pi$ es una medida en radianes* de un arco menor de los no negativos arcos AM, con origen en el punto A y final en M, si $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

Inversamente, a la serie de números reales

$$X = a + 2\pi k,$$

para $0 \leqslant a < 2\pi$ y $k = 0; \pm 1, \pm 2; \pm 3; \ldots$ se le pone en correspondencia, en la circunferencia de radio 1, el punto M que es el final del menor de los arcos no negativos $AM = X$ *rad*, con origen en el punto A y final en M.

La circunferencia de radio 1, considerada en el sistema xOy, se llama *circunferencia numérica*, y el número X, puesto en correspondencia con el punto M de la circunferencia, se llama *coordenada circular del punto M*.

A lo expuesto se le puede dar la siguiente ilustración.

Sea dada una circunferencia O de radio 1 y el eje numérico AX, tangente a la misma en el origen A de los arcos, con origen en el punto A, unidad de escala $1 = R$ y sentido positivo de abajo hacia arriba (fig. 78).

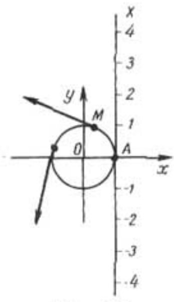
Supongamos que la circunferencia es rígida (no puede ser deformada), y el eje AX es un hilo flexible y no extensible sin espesor.

---

* La medida en radianes del arco se llama su longitud si el radio es igual a la unidad.

Superpongamos mentalmente sobre la circunferencia el semieje positivo AX, girándolo alrededor del punto A en el plano xOy en contra de las agujas del reloj. Al finalizar la primera vuelta completa de AX habrá una coincidencia total del semisegmento $O \leqslant x < 2\pi$ del eje con la circunferencia *.

La "coincidencia total" debe ser entendida así: cada punto X del semisegmento $O \leqslant x < 2\pi$ del eje coincide con un punto de la circunferencia, precisamente con aquel punto M que es el extremo del arco positivo $\breve{A}M$, que tiene, con $R = 1$, la longitud X.



F i g. 78

Y viceversa, el punto M de la circunferencia, que es el extremo del arco positivo AM que tiene la longitud X $(0 \leqslant X < 2\pi)$, para $R = 1$, coincide con un punto del semisegmento $O \leqslant X < 2\pi$ del eje AX, precisamente, con aquel punto del eje, cuya coordenada es el número X.

En la segunda vuelta completa tiene lugar una coincidencia total con la circunferencia del semisegmento $2\pi \leqslant X \leqslant 4\pi$ del eje; en la tercera, del semisegmento $4\pi \leqslant X \leqslant 6\pi$, etc. De este modo, cualquier punto del semieje numérico positivo AX, que es la imagen geométrica del número X, llega a ser el punto M de la circunferencia, y por eso el punto M de la circunferencia se toma como la imagen geométrica del número X. Pero si al punto del eje numérico le corresponde un único número, entonces al punto de la circunferencia le corresponde una serie infinita de números. Hallemos la fórmula de esta correspondencia.

Sea $0 \leqslant a < 2\pi$	Representemos cualquier número X
del *semisegmento* $0 \leqslant X < 2\pi$	*como* $X = a + 2\pi \cdot 0$,
del semisegmento $2\pi \leqslant X < 4\pi$	como $X = a + 2\pi \cdot 1$,
del semisegmento $4\pi \leqslant X < 6\pi$	como $X = a + 2\pi \cdot 2$, etc.

Cualquier número no negativo X del eje AX

$$X = a + 2\pi \cdot k, \qquad (*)$$

donde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Supongamos que giramos mentalmente alrededor del punto A el semieje negativo del eje numérico AX (fig. 79) también en el plano xOy, pero a favor de las agujas del reloj. Entonces hay una completa coincidencia de la circunferencia con los semiintervalos del eje $-2\pi < X \leqslant 0$; $-4\pi < X \leqslant -2\pi$; $-6\pi < X \leqslant -4\pi$, etc.

Supongamos, como antes, que $0 \leqslant a < 2\pi$. Entonces cualquier número del semisegmento $-2\pi < X \leqslant 0$ puede ser representado así (fig. 79):

$$X = -(2\pi - a) = a - 2\pi = a + 2\pi\,(-1),$$

* La longitud de la circunferencia con $R = 1$ es igual a 2π.

y de los semiintervalos $-4\pi < X \leqslant 2\pi$; $6\pi < X \leqslant 4\pi$; ..., respectivamente:

$$X = a - 2\pi\,(\cdot 2);\ a - 2\pi\,(\cdot 3);\ \ldots$$

o como:

$$X = a + 2\pi\,(-2);\ a + 2\pi\,(-3);\ \ldots$$

En general, cualquier *número no positivo X del eje AX*

$$X = a + 2\pi\,(-k),\ \text{donde}\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Uniendo esta fórmula con la fórmula (*) obtenemos que *cualquier número real*

$$X = a + 2\pi k,$$

donde

$$0 < a \leqslant 2\pi,\ k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots$$

y a cualquier número X le corresponde en la circunferencia numérica el punto M (X), que es el final del menor de los arcos no negativos con origen en el punto A y final en el punto M.

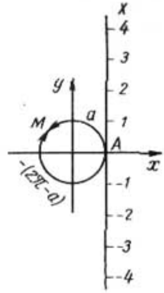


Fig. 79

12°. **Las funciones trigonométricas como funciones del argumento numérico. Definiciones:**

1. *Se llama seno de un número X a la ordenada del punto que le corresponde en la circunferencia numérica.*

2. *Se llama coseno de un número X a la abscisa del punto que le corresponde en la circunferencia numérica.*

Por definición, si al punto X le corresponde en la circunferencia numérica el punto M (x, y) (fig. 80), entonces

$$\operatorname{sen} X = y,\ \cos X = x.$$

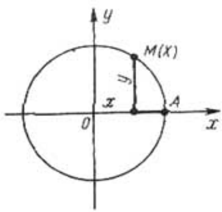


Fig. 80

3. *Se llama tangente de un número X a la relación* $\frac{\operatorname{sen} X}{\cos X}$ o sea, tg$X$ es la relación de la ordenada a la abscisa del punto de la circunferencia numérica correspondiente a X.

4. *Se llama cotangente de un número X a la relación* $\frac{\cos X}{\operatorname{sen} X}$, o sea, ctg X es la relación de la abscisa a la ordenada del punto de la circunferencia numérica correspondiente a X.

Las funciones sen X y cos X expresan las leyes de variación de las coordenadas de un punto en su rotación circular, y tg X y ctg X, las leyes de variación de sus relaciones. Por eso, $\operatorname{sen} X$, $\cos X$, $\operatorname{tg} X$, y $\operatorname{ctg} X$ también se llaman *funciones circulares.*

Entre $\operatorname{sen} X$, $\cos X$, $\operatorname{tg} X$ y $\operatorname{ctg} X$ *existen tres relaciones independientes*:

$$1)\ \operatorname{sen}^2 X+\cos^2 X=1,\quad 2)\ \operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},\quad 3)\ \operatorname{tg} X\cdot\operatorname{ctg} X=1.$$

C a m p o s d e d e f i n i c i ó n y d e v a l o r e s d e l a s f u n c i o n e s c i r c u l a r e s. Las funciones sen X y cos X están definidas en el conjunto de todos los números reales, o sea,

$$-\infty<X<+\infty.$$

Ya que las coordenadas x, y de los puntos de la circunferencia numérica son números de los segmentos

$$-1\leqslant x\leqslant 1,\quad -1\leqslant y\leqslant 1,$$

entonces

$$-1\leqslant\operatorname{sen} X\leqslant 1,\quad -1\leqslant\cos X\leqslant 1.$$

La función $\operatorname{tg} X$ no está definida para aquellos X, para los cuales $\cos X=0$, es decir, para $X=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot k$, donde $k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$, y está definida en los intervalos entre estos puntos, o sea, en los siguientes intervalos

$$\ldots -\frac{3}{2}\pi<X<-\frac{\pi}{2};\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant X<\frac{\pi}{2};$$
$$\frac{\pi}{2}<X<\frac{3}{2}\pi;\ \ldots$$

La función ctg X no está definida para todos aquellos X, para los cuales $\operatorname{sen} X=0$, es decir, para $X=k\pi$, donde $k=0;\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, y está definida en los intervalos comprendidos entre estos puntos, o sea, en los intervalos

$$\ldots -2\pi<X<-\pi;\ -\pi<X<0;\ 0<\pi;\ \pi<X<2\pi;\ldots$$

13°. F u n c i o n e s p e r i ó d i c a s. D e f i n i c i ó n. *La función $f(x)$ se llama periódica, si existe un número positivo l, tal que para cualquier valor del argumento x los valores de la función en los puntos x, $x+l$ y $x-l$ son iguales, o sea,*

$$\boxed{f(x)=f(x+l)=f(x-l).}\qquad (*)$$

De la definición se deduce que si $f(x)=f(x+l)=$ $=f(x-l)$,
entonces

$$f(x)=f(x+kl),$$

donde

$$k=\pm 1 \pm 2; \dots$$

Por eso es importante conocer el menor número positivo l, para el cual se cumplen las igualdades (*) para todo valor de x. Tal número positivo se llama *período de la función* $f(x)$.

14°. Teorema. *Las funciones circulares son funciones periódicas.*

En efecto, sea X un número fijo cualquiera, para el cual la función circular considerada está definida. Entonces a los números X, $X+2\pi$, $X-2\pi$ les corresponde en la circunferencia numérica un mismo punto, cuyas coordenadas cartesianas son x, y. Por esto

$$\operatorname{sen} X=\operatorname{sen}(X+2\pi)=\operatorname{sen}(X-2\pi)=y,$$
$$\cos X=\cos(X+2\pi)=\cos(X-2\pi)=x,$$
$$\operatorname{tg} X=\operatorname{tg}(X+2\pi)=\operatorname{tg}(X-2\pi)=\frac{y}{x},$$
$$\operatorname{ctg} X=\operatorname{ctg}(X+2\pi)=\operatorname{ctg}(X-2\pi)=\frac{x}{y}.$$

Para sen X y cos X el número 2π es el período, ya que no existe ningún número positivo menor que cumpla la condición de periodicidad (*), Pero para tg X y ctg X existe un número menor, que es π, el cual es período de tg$X$ y ctg X.

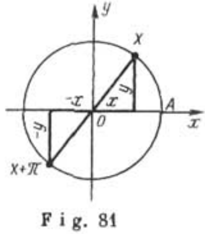


Fig. 81

Efectivamente, tracemos en la circunferencia numérica un diámetro cualquiera (fig. 81). Si la coordenada numérica de uno de sus extremos es X, entonces la del segundo es $X+\pi$ o $X-\pi$, y si las coordenadas cartesianas de uno de los extremos del diámetro son (x, y), las del otro serán $(-x, -y)$. Por eso tenemos que:

$$\operatorname{tg} X=\frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg}(X+\pi)=\operatorname{tg}(X-\pi)=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x},$$
$$\operatorname{ctg} X=\frac{x}{y}, \quad \operatorname{ctg}(X+\pi)=\operatorname{ctg}(X-\pi)=\frac{-x}{-y}=\frac{x}{y},$$

es decir,

$$\operatorname{tg} X = \operatorname{tg}(X \pm \pi), \quad \operatorname{ctg} X = \operatorname{ctg}(X \pm \pi).$$

Escribamos las fórmulas de periodicidad de las funciones circulares:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} X &= \operatorname{sen}(X + 2\pi k), \\ \cos X &= \cos(X + 2\pi k), \\ \operatorname{tg} X &= \operatorname{tg}(X + \pi k), \\ \operatorname{ctg} X &= \operatorname{ctg}(X + \pi k) \end{aligned}$$

donde

$$k = \pm 1; \ \pm 2; \ \ldots$$

15°. Funciones pares e impares. Definiciones: 1. *La función $f(x)$ se llama par, si para cualquier valor x de su campo de definición, el número $-x$ también pertenece a su campo de definición, y $f(-x) = f(x)$*

2. *La función $f(x)$ se llama impar, si para cualquier valor x de su campo de definición, el número $-x$ también pertenece al mismo, y $f(-x) = -f(x)$.*

Ejemplos: 1) $f(x) = x^2$ para $-\infty < x < +\infty$ es una función par; 2) $f(x) = x^3$, si $-\infty < x < +\infty$ es una función impar; 3) $f(x) = x^2$ para $0 \leqslant x < +\infty$ no es ni par ni impar, ya que para el valor de $x > 0$ el valor opuesto de x no pertenece al campo de definición de la función:

4) $y = (x - 1)^2$ no es ni par ni impar, ya que, por ejemplo, para $x = 2$ $y = (2-1)^2 = 1$, y para $x = -2$ $y = (-2-1)^2 = 9$.

Para una función par $f(-x) = f(x)$, los puntos $[x, f(x)]$ y $[-x, f(x)]$ están dispuestos simétricamente respecto al eje Oy, y por lo tanto, *la gráfica de una función par es una línea simétrica respecto al eje Oy.*

Para una función impar $f(-x) = -f(x)$ los puntos $(x, f(x)$ y $[-x, -f(x)]$ están dispuestos simétricamente respecto al origen de coordenadas O y por lo tanto, *la gráfica de una función impar es una línea asimétrica respecto al origen de coordenadas O.*

16°. Teorema. *La función $\cos X$ es par, y $\operatorname{sen} X$, $\operatorname{tg} X$ y $\operatorname{ctg} X$ son impares.*

En efecto, si en la circunferencia numérica O está el punto X, entonces en ella está también $-X$ simétrico respecto al origen A y al eje de abcisas Ox; además, si las coordenadas del punto X con (x, y), entonces las coordenadas del $-X$ son $(x, -y)$ (fig. 82). Por eso

$\cos X = x$, y $\cos(-X) = x$, es decir, $\cos(-X) = \cos X$;

$\operatorname{sen} X = y$, y $\operatorname{sen}(-X) = -y$, es decir, $\operatorname{sen}(-X) = -\operatorname{sen} X$;

$\operatorname{tg} X = \frac{y}{x}$, y $\operatorname{tg}(-X) = \frac{-y}{x}$, es decir, $\operatorname{tg}(-X) = -\operatorname{tg} X$,

$\operatorname{ctg} X = \frac{x}{y}$, y $\operatorname{ctg}(-X) = \frac{x}{-y}$, es decir, $\operatorname{ctg}(-X) = -\operatorname{ctg} X$.

17°. Intervalos de monotonía de las funciones circulares. De la condición $f(-x) = -f(x)$ de la función de ser impar, se sigue que *si en el intervalo (a, b) la función impar $f(x)$ es creciente (decreciente), entonces ella es creciente (decreciente) también en el intervalo simétrico $(-b, -a)$.* Asimismo, de la condición $f(-x) = f(x)$ de la función de ser par, se deduce que *si en el intervalo (a, b) la función par es creciente (decreciente), entonces en el intervalo simétrico $(-b, -a)$ la misma es decreciente (creciente).*

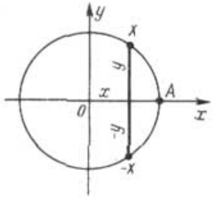


Fig. 82

Partiendo de esto, *para determinar los intervalos de monotonía de las funciones par e impar, es suficiente determinarlos sólo para los valores positivos de argumento.*

En el intervalo $0 < X < \frac{\pi}{2}$ (véase fig. 82) al crecer X, y crece de 0 a 1, y x decrece de 1 a 0. De aquí se deduce que en el intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$\operatorname{sen} X$ es creciente de 0 a 1,
$\operatorname{tg} X$ es creciente de 0 a $+\infty$.

Basándose en la observación hecha, y debido a que las funciones $\operatorname{sen} X$ y $\operatorname{tg} X$ son impares, en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < X < 0$ simétrico respecto a $0 < X < \frac{\pi}{2}$,

$\operatorname{sen} X$ es creciente de -1 a 0,
$\operatorname{tg} X$ es creciente de $-\infty$ a 0.

Por lo tanto, $\operatorname{sen} X$ y $\operatorname{tg} X$ *en el intervalo* $-\frac{\pi}{2} < X < \frac{\pi}{2}$ *son funciones crecientes*, y además crecen en los intervalos

$$-1 < \operatorname{sen} X < 1 \text{ y } -\infty < \operatorname{tg} X < +\infty.$$

La función $\operatorname{sen} X$ es también creciente en los intervalos:

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi k<X<\frac{\pi}{2}+2\pi k,$$

y decreciente en los intervalos:

$$-\frac{\pi}{2}+\pi(2k+1)<X<\frac{\pi}{2}+\pi(2k+1).$$

La función $\operatorname{tg} X$ es creciente en todos los intervalos en los que está difinida, o sea, en los intervalos

$$-\frac{\pi}{2}+\pi k<X<\frac{\pi}{2}+\pi k.$$

Cuando X crece en el intervalo $0<X<\frac{\pi}{2}$, x decrece, e y crece; por esto, $\frac{x}{y}$ decrece. En el intervalo $\frac{\pi}{2}<X<\pi$, x es negativo, $|x|$ crece, e y decrece; por eso $\left|\frac{x}{y}\right|$ crece, y $\frac{x}{y}$ decrece (fig. 82).

Así, pues, $\cos X$ y $\operatorname{ctg} X$ *en el intervalo* $0<x<\pi$ *son funciones decrecientes*, disminuyendo en los intervalos

$$1>\cos X>-1,\ +\infty>\operatorname{ctg} X>-\infty,$$

el $\cos X$ también es decreciente en los intervalos:

$$2\pi k<X<\pi(2k+1),$$

y creciente en los intervalos:

$$\pi(2k+1)<X<\pi(2k+2),$$

la $\operatorname{ctg} X$ es una función decreciente en todos los intervalos en los cuales está definida, o sea, en los intervalos

$$k\pi<X<\pi(k+1).$$

Todas las propiedades consideradas de las funciones trigonométricas tienen su adecuada ilustración en las gráficas de las funciones: $Y=\operatorname{sen} X$, $Y=\cos X$. $Y=\operatorname{tg} X$, $Y=\operatorname{ctg} X$ (figs. 83 y 84).

18°. Funciones circulares inversas (trigonométricas).

Fue demostrado (en 8°) que en el intervalo de monotonía figurosa una función tiene su función inversa.

Las funciones $Y = \operatorname{sen} X$, $Y = \operatorname{tg} X$ son estrictamente monótonas (crecientes) en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < X < \frac{\pi}{2}$ y en él tienen sus funciones inversas $x = \operatorname{arcsen} Y$, $X = \operatorname{arctg} Y$.

Las funciones $Y = \cos Y$, $Y = \operatorname{ctg} X$ son estrictamente monótonas (decrecientes) en el intervalo $0 < X < \pi$, y en

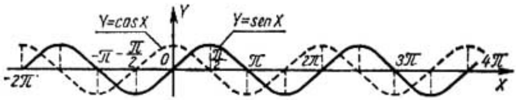


Fig. 83

éste tienen sus respectivas funciones inversas $X = \arccos Y$, $X = \operatorname{arcctg}\ Y$.

Estas funciones inversas se llaman *funciones circulares inversas*, o *funciones trigonométricas inversas*. Las estudia-

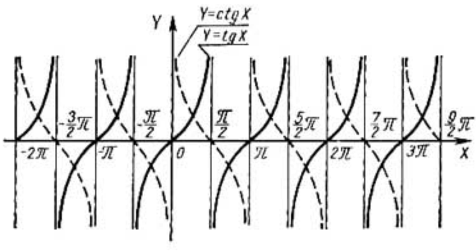


Fig. 84

remos introduciendo las notaciones comunes: designar la función por la letra Y, y su argumento por X.

Por definición,

$$Y = \operatorname{arcsen} X, \text{ si } \operatorname{sen} Y = X \text{ y } -\frac{\pi}{2} \leqslant Y \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$Y = \arccos X, \text{ si } \cos Y = X \text{ y } 0 \leqslant Y \leqslant \pi;$$

$$Y = \operatorname{arctg} X, \text{ si } \operatorname{tg} Y = X \text{ y } -\frac{\pi}{2} < Y < \frac{\pi}{2};$$

$$Y = \operatorname{arcctg} X, \text{ si } \operatorname{ctg} Y = X \text{ y } 0 < Y < \pi.$$

Las funciones arcsen X y arctg X son crecientes, y arccos X y arcctg X son decrecientes.

Al crecer X en el intervalo $-1 \leqslant X \leqslant 1$, la función arcsen X crece en el segmento $-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{arcsen } X < \frac{\pi}{2}$, y el arccos X decrece en el segmento $\pi \geqslant \arccos X \geqslant 0$.

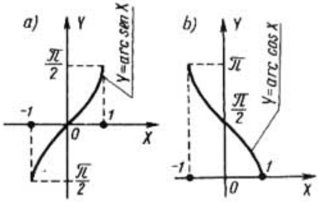


Fig. 85

Al crecer X en el intervalo $-\infty < X < +\infty$, la función arctg X crece en el intervalo $-\frac{\pi}{2} < \text{arctg}\, X < \frac{\pi}{2}$ y arcctg X decrece en el intervalo $\pi > \text{arcctg}\, X > 0$.

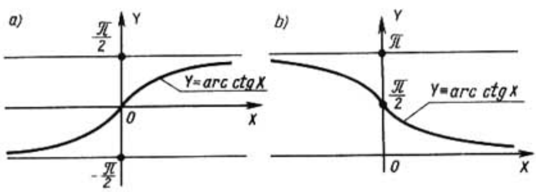


Fig. 86

Las gráficas de las funciones $Y = \text{arcsen}X$, y arccos X, $Y <$ arctg X e $Y = \text{arcctg}X$ están representadas en las figs. 85 y 86.

§ 65. El límite de una función en un punto c

1°. Cuando se dice sobre el límite de una función $f(x)$ en el punto c $(x \to c)$ se supone que existen valores del argumento x, arbitrariamente cercanos al número c, en otras palabras, que *el entorno de cualquier radio pequeño* δ *con centro en el* *punto c, contiene valores de x, no iguales a c, para los cuales la función $f(x)$ está definida. En el mismo punto c la función $f(x)$ puede no estar definida.*

2°. Ejemplo. Supongamos que $f(x) = x^2$ y $x \to 2$. Indiquemos que si x se aproxima al número 2, la función x^2 se aproxima a 4. Por ejemplo:

si $x =$	1,9	1,99	1,999	$\ldots \to 2$
entonces x^2	3,6	3,96	3,996	$\ldots \to 4$

si $x =$	2,1	2,01	2,001	$\ldots \to 2$
entonces x^2	4,5	4,05	4,005	$\ldots \to 4$

Para cada número positivo ε, arbitrariamente pequeño existe tal δ entorno del punto $x = 2$, que para todos los valores de x, pertenecientes a este δ entorno, la diferencia $x^2 - 4$ será en valor absoluto menor que ε, es decir,

$$|x^2 - 4| < \varepsilon. \tag{1}$$

Ya que

$$|x^2 - 4| = |x + 2| \cdot |x - 2|,$$

se puede escribir:

$$|x + 2|\ |x - 2| < \varepsilon.$$

Es claro, que para que se cumpla la desigualdad (1) es suficiente que sea cumplida la desigualdad

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{|x + 2|}. \tag{2}$$

El valor del denominador $|x + 2|$ se puede elegir examinando la variación de x en un entorno determinado del punto $x = 2$, por ejemplo, en el intervalo $1 < x < 3$; en este intervalo

$$3 < |x + 2| < 5.$$

Sustituyendo en la desigualdad (2) $|x + 2|$ por el número 5, se obtiene: la desigualdad $|x^2 - 4| < \varepsilon$ se cumple por pequeño que sea el número positivo ε, si $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$.

En otras palabras, la desigualdad $|x^2 - 4| < \varepsilon$ se cumple para todos los valores de x pertenecientes al entorno del punto $x = 2$ de radio $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$.

El número 4 se llama límite de la función x^2 si $x \to 2$, o límite de la función en el punto $x = 2$.

3°. D e f i n i c i ó n. *El número A es el límite de la función $f(x)$ en el punto C si para cualquier número pequeño positivo dado existe un número positivo δ tal que la magnitud absoluta de la diferencia entre $f(x)$ y A es menor que ε, si la magnitud absoluta de la diferencia entre x y c es menor que δ, es decir,*

$$\boxed{|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad 0 < |x - c| < \delta.} \tag{II}$$

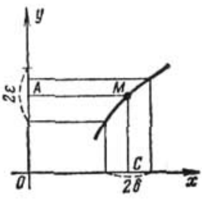
4°. Geométricamente, la verificación de la desigualdad

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

una vez cumplida la desigualdad

$$0 < |x - c| < \delta$$

significa que si en el eje Oy se señala un entorno del punto A de un radio ε arbitrariamente pequeño (fig. 87), se puede encontrar tal δ-entorno del punto c en el eje Ox que todos los puntos del cual (con la posible excepción de su centro c) se reflejan en el ε-entorno del punto A, en el eje Oy.



F i g. 87

5°. P u e d e o c u r r i r q u e p a r a $x \to c$ l a f u n c i ó n s e a u n a m a g n i t u d i n f i n i t a m e n t e g r a n d e. Por ejemplo la función $y = \frac{1}{x^2}$ (fig. 74), para $x \to 0$ es una magnitud infinitamente grande.

En este caso se deben aplicar las indicaciones de § 50. 7° y § 59, 2°.

§ 66. El límite de una función para $x \to \infty$

1°. Algunas funciones tienen límite finito A si el argumento x crece (o disminuye) indefinidamente.

E j e m p l o 1. $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ tiene como límite el número 2, para $x \to \pm\infty$ (fig. 88). En efecto,

$$f(x) = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}.$$

De donde:

$$f(x) = -2 = \frac{1}{x}.$$

Dado un número positivo ε arbitrariamente pequeño, tenemos:

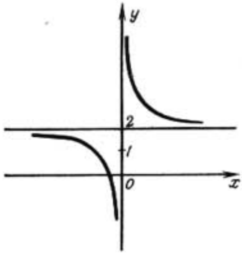
$$|f(x) - 2| < \varepsilon, \quad \text{para} \quad |x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to (\pm \infty)} f(x) = 2.$$

E j e m p l o 2. $\lim\limits_{x \to (-\infty)} 10^x = 0$. En efecto, como $10^x > 0$, para cualquier x determinada

$$10^x - 0 < \varepsilon, \quad \text{si} \quad x < \lg \varepsilon.$$



F i g. 88

E j e m p l o 3. $\lim\limits_{x \to (+\infty)} 10^x = +\infty$. En efecto, por grande que sea el número positivo N propuesto, se tiene que

$$10^x > N, \quad \text{para} \quad x > \lg N.$$

2°. D e f i n i c i ó n. *El número A es el límite de la función f (x) para* $x \to \infty$ *cuando para cualquier número pequeño positivo* ε *dado existe un número positivo N tal que:*

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{para} \quad x > N \ (\text{o } x < -N).$$

§ 67. Observaciones

En ocasiones resulta que el límite de la función $f(x)$ en el punto c tiene diferente valor cuando x tiende a c por la izquierda, es decir, siendo menor que c, y cuando x tiende a c por la derecha, es decir, siendo mayor que c.

En el caso, cuando en el punto c los límites de la función "por la izquierda" y "por la derecha" no son iguales, la función en el punto c no posee límite ordinario.

E j e m p l o. Hallar el límite de la función:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 10^{\frac{1}{x - c}}},$$

Solución. Indiquemos la magnitud del quebrado $\frac{1}{x-c}$ por medio de z,

$$z=\frac{1}{x-c}.$$

Si x se aproxima a c por la izquierda ($x<c$), la diferencia $x-c$ se aproxima a cero, permaneciendo negativa, y z en este caso

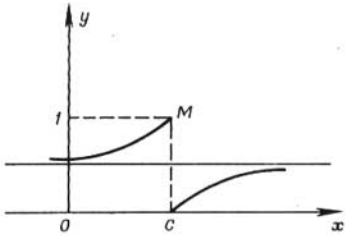


Fig. 89

tiende a $-\infty$. Como $\lim\limits_{z\to-(\infty)} 10^z=0$, se tiene

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} f(x)=\frac{1}{1+0}=1.$$

Si x se aproxima a c por la derecha ($x>c$), la diferencia $x-c$ se aproxima a cero, siendo positiva, y la magnitud z en este caso tiende a $+\infty$. Como $\lim\limits_{x\to(+\infty)} 10^z=+\infty$, la magnitud del quebrado $\frac{1}{1+10^z}$ tiene como límite 0:

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x>c}} f(x)=0.$$

Por consiguiente, la función dada posee límite "por la izquierda" igual a 1, límite "por la derecha" igual a 0, y no tiene límite ordinario, (fig. 89).

2°. Por la definición de límite, el número A es el límite de $f(x)$ en el punto $x=c$ para la condición $|f(x)-A|<\varepsilon$, si $|\,0<|x-c|<\delta$.

Estas desigualdades muestran, que los valores de la función existen y se estudian en el entorno del punto $x=c$; además, la desigualdad $0<|x-c|$ excluye el mismo punto

$x=c$, o sea, el valor de la función $f(x)$ en el punto $x=c$ no se estudia. *En el punto $x=c$ la función puede no ser definida y los valores de la función en el punto $x=c$ pueden no existir.*

La existencia o no existencia del límite de la función $f(x)$ en el punto $x=c$ se determina por los valores de la función para $x \neq c$.

Por ejemplo, $f(x)=\dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x-c}}}$ no está definida para $x=c$, ya que para $x=c$, $x-c=0$ y la división $\dfrac{1}{x-c}=\dfrac{1}{0}$ no es posible; pero esta circunstancia no juega ningún papel para el cálculo del límite $f(x)$ en el punto $x=c$.

No se excluye el caso, de que *en el punto $x=c$ existan el valor de la función, el número $f(c)$, y el límite de la función, el número A*, pero estos números no sean iguales entre sí, $f(c) \neq A$.

§ 68. Continuidad de la función en un punto

1°. Definiciones. 1. *La función $f(x)$ se llama continua en el punto $x=c$, si el límite de la función en el punto c es igual al valor de la función en este mismo punto, es decir, si*

$$\boxed{\lim_{x\to c} f(x)=f(c)} \tag{III}$$

2. *Todo punto en el que la función sea continua, se llama punto de continuidad de la función.*

3. *La función se llama continua en un segmento si es continua en cada punto del segmento.*

4. *El punto en el que no se cumple la condición de continuidad de la función se llama punto de discontinuidad o punto de interrupción de la función, y la propia función se llama discontinua en el punto.*

2°. El incumplimiento de la condición de continuidad (III) puede consistir, por ejemplo, en lo siguiente.

1. El límite de $f(x)$ en el punto c a la izquierda no es igual al límite por la derecha. Por ejemplo: a) la función $f(x)=\dfrac{1}{1+10^{\frac{1}{x-c}}}$, en la que $c>0$ (fig. 89), en el punto $x=c$

tiene límite a la izquierda, igual a 1, y a la derecha, igual a 0 (§ 67); $x = c$ es el punto de discontinuidad; b) la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ (fig. 90) en el punto $x = 0$ tiene límite a la

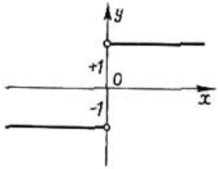


Fig. 90

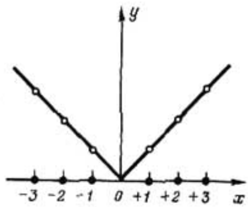


Fig. 91

izquierda, igual a -1, y a la derecha, igual a $+1$; $x = 0$ es el punto de discontinuidad de la función.

2. El límite de $f(x)$ en el punto c no es igual al valor de la función, para $x = c$. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} |x|, \text{ si } x \text{ es cualquier número real, pero no entero,} \\ 0, \text{ si } x \text{ es número entero,} \end{cases}$$

en los puntos $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ tiene un mismo límite, tanto a la derecha como a la izquierda, igual respectivamente a 3, 2, 1, 1, 2, 3, pero el límite no equivale al valor de la función en esos puntos, que es igual a cero. La gráfica de esta función (fig. 91) es una línea quebrada formada por las bisectrices de los angulos de coordenadas del segundo y primer cuadrantes, de las cuales se han "extraído" los puntos que tienen como abscisa un número entero, habiendo sido colocados estos puntos en el eje Ox.

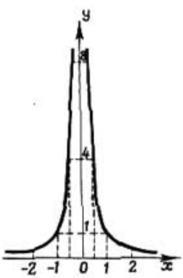


Fig. 92

Al ser $x = -3, -2, -1, 1, 2, 3$, etc., se produce la ruptura de la continuidad de la función.

3. El límite de la función $f(x)$ en el punto c es infinito. Por ejemplo, la función $y = \frac{1}{x^2}$ (fig. 92) tiene en el punto $x = 0$ límite infinito, $x = 0$ es punto de discontinuidad.

La función $y = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$ en el punto $x = 0$ tiene como límite a la izquierda $-\infty$, y a la derecha $+\infty$ (fig. 88); cuando $x = 0$ la función es discontinua.

Destaquemos que los ejemplos dados no abarcan todos los tipos de discontinuidades.

3°. Los casos señalados de discontinuidad de las funciones tienen lugar en la técnica. Por ejemplo, las vigas que se emplean en la construcción soportan a menudo la siguiente carga: a la izquierda de la sección dada, la carga está repartida uniformemente a lo largo de la viga y tiene una misma magnitud; a la derecha de la sección también está repartida uniformemente, pero tiene otra magnitud completamente diferente. Así pues, en la sección dada de la viga aparece un salto en el reparto de la carga a lo largo de la misma. La ley del reparto de la carga en este caso corresponde a una función discontinua, siendo el salto en el reparto de la carga a lo largo de la viga correspondiente al punto de discontinuidad de la función. La carga, concentrada en diferentes puntos de la viga, puede corresponder a los puntos aislados de la gráfica del reparto de la carga a lo largo de la viga.

4°. N o t a. La fórmula que determina la función $f(x)$ puede no definir el valor de la función en el punto c. Por ejemplo, si $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $f(x) = \frac{k}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = = \operatorname{ctg} x \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$, entonces la fórmula no determina los valores de la función en el punto $x = 0$, ya que dividir entre cero no es posible.

En el caso que la fórmula no determine el valor de la función en el punto $x = c$, es imprescindible hallar el límite de la función en el punto c. Por ejemplo, se halla que en el punto $x = 0$ la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ posee límite por la izquierda -1, y por la derecha 1; la función $f(x) = \frac{k}{x}$ posee límite por la izquierda $-\infty$, y por la derecha $+\infty$; la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ posee límite infinito; la función $f(x) = = \operatorname{ctg} x$ posee límite por la izquierda $-\infty$, y por la derecha $+\infty$, o sea, *todas estas funciones no poseen límite en el punto $x = 0$ y por ello $x = 0$ es un punto de discontinuidad de estas funciones, para $x = 0$ no existen valores de estas funciones.*

Es posible otro caso, cuando la fórmula, por ejemplo, $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, no determina el valor de la función en el punto, $x = 0$, pero la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ posee límite en el punto $x = 0$;

más abajo (§ 86) se demostrará, que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Se puede en la misma forma demostrar, que la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es continua en cada punto $x \neq 0$.

En tal caso, *si la fórmula $y = f(x)$ no determina el valor de la función $f(x)$ en el punto $x = c$, pero el límite de la función $f(x)$ en el punto $x = c$ es cierto número A y la función $f(x)$ es continua en los puntos $x \neq c$, se considera*

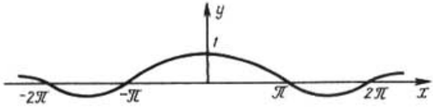


Fig. 93

a la función $f(x)$ continua en el punto $x = c$, y el límite A, el valor de la función para $x = c$, $f(c) = A$, y se denomina *valor de la función por continuidad.*

De esta forma, el número 1 es el valor de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ para $x = 0$, el valor de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ por la continuidad (fig. 93).

§ 69. Otra expresión de la condición de continuidad de la función en el punto

De la condición de continuidad (III) se deduce que

$$\lim_{x\to c} (x - c) = 0, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to c} [f(x) - f(c)] = 0. \tag{2}$$

Pero la diferencia $x - c$ expresa el incremento Δx del argumento en el punto c.

$$x - c = \Delta x,$$

siendo la diferencia $f(x) - f(c)$ expresa el correspondiente incremento Δy de la función

$$f(x) - f(c) = \Delta y.$$

La tendencia de x a c es equivalente a la tendencia de Δx a cero. Por eso, la igualdad (2) se puede representar así:

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,} \qquad \text{(IV)}$$

es decir, para una finción continua en un punto, el incremento de la función es una magnitud infinitamente pequeña si el incremento del argumento en este punto se hace infinitamente pequeño.

§ 70. Discusión de la continuidad de la función

Ejemplo. Demostremos que sen x es una funcón continua para cualquier valor de x. A este fin comprobaremos que para $y = \operatorname{sen} x$, en cualquier punto $x = c$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Si indicamos los valores del seno, cuando su arco es igual a c y $c + \Delta x$, por medio de y e $y + \Delta y$ respectivamente, se tiene:

$$y = \operatorname{sen} c \;\text{ e }\; y + \Delta y = \operatorname{sen}(c + \Delta x).$$

Restando la primera igualdad de la segunda, resulta:

$$\Delta y = \operatorname{sen}(c + \Delta x) - \operatorname{sen} c,$$

o, según la fórmula trigonométrica:

$$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\Delta y = 2 \cos \left(c + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}.$$

El valor absoluto:

$$|\Delta y| = 2 \cdot \left| \cos \left(c + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \cdot \left| \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \right|.$$

$\left| \cos \left(c + \frac{\Delta x}{2} \right) \right|$ no puede ser mayor que 1; si $\left| \cos \left(c + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| = 1$. $\left| \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \right| \leqslant \frac{|\Delta x|}{2}$ (§ 49, 3°).

Por eso $\Delta y \leqslant 2 \cdot 1 \cdot \frac{|\Delta x|}{2}$, es decir, $|\Delta y| \leqslant |\Delta x|$.

Puesto que según la condición $|\Delta x| < \varepsilon$, también $|\Delta y| < \varepsilon$ o $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, por lo tanto, sen x es una función continua para cualquier valor de x.

§ 71. Propiedades de las funciones continuas en un punto

1°. *El cálculo del límite de una función continua en un punto se puede sustituir por el cálculo del valor de la función en este punto ya que la función $f(x)$ continua en el punto c tiene*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Considerando c como el límite de x, si $x \to c$, esta propiedad puede expresarse así: *el símbolo de límite de una funcón continua se puede trasladar al argumento,*

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = f(\lim_{x \to c} x)} \qquad \text{(V)}$$

2°. *La función $f(x)$, constante en un entorno del punto c, es continua en el punto c.*

D e m o s t r a c i ó n. Según la condición, $f(x)$ en el entorno del punto $x = c$ es constantemente igual, por ejemplo, a k, $f(x) = k$. Por eso

$$\lim_{x \to c} f(x) = k.$$

Pero como

$$f(c) = k,$$

se tiene

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

y, por tanto, $f(x)$ es continua, que era lo que se trataba de demostrar.

3°. *La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos funciones continuas en el punto $x = c$ es una función continua si el denominador del cociente no se convierte en cero.*

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que $f(x)$ y $\varphi(x)$ son funciones continuas en el grupo $x = c$, es decir, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ y $\lim\limits_{x \to c} \varphi(x) = \varphi(c)$. Según los teoremas acerca de los límites (§ 53, 54 y 55), se tiene:

1) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \pm \lim\limits_{x \to c} \varphi(x) = f(c) \pm \varphi(c)$;

2) $\lim\limits_{x \to c} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} \varphi(x) = f(c) \cdot \varphi(c)$;

3) $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} \varphi(x)} = \dfrac{f(c)}{\varphi(c)}$, si $\varphi(c) \neq 0$.

4° Se puede demostrar (no damos la demostración) que *las funciones elementales básicas* (§ 64,1°) *son continuas en cualquier punto de sus campos de definición.*

Se puede demostrar también (no damos la demostración) que *la función continua de función continua en un punto dado, es una función continua en dicho punto.*

Por ejemplo, $\lg x$ *y* $\operatorname{sen} x$ *son funciones continuas;* de acuerdo al teorema tenemos: $\lg \operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen} \lg x$ son funciones continuas (se sobreentiende que en los puntos, para los cuales están definidas).

5° *Ejemplo.* $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x+\cos 2x}{\lg \operatorname{sen} x}$. *Hallar* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)$.

Solución. Las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos 2x$, $\lg \operatorname{sen} x$ son continuas en los puntos del contorno del punto $x=\dfrac{\pi}{6}$. La suma $\operatorname{sen} x+\cos 2x$, y el cociente $\dfrac{\operatorname{sen} x+\cos 2x}{\lg \operatorname{sen} x}$ son continuas en el punto $x=\dfrac{\pi}{6}$. Esto significa que el cálculo del límite $f(x)$ puede sustituirse por el cálculo del valor de $f(x)$ para $x=\dfrac{\pi}{6}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} f(x)=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}}{\lg \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\lg\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\lg 2}=-\frac{1}{0,301}=-3,32.$$

6°. *De lo expuesto se deduce que el polinomio*

$$Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Px+Q$$

y el quebrado

$$\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Px+Q}{ax^m+bx^{m-1}+\ldots+kx+l}\quad \text{(quebrado irreducible)}$$

son funciones continuas, excluyendo aquellos valores del argumento que convierten en cero el denominador.

CAPITULO VI

FUNCION DERIVADA

§ 72. Problemas que conducen al concepto de derivada

1°. El espacio s recorrido durante el tiempo t por un cuerpo que cae libremente en el vacío se determina por medio de la fórmula:

$$s = \frac{1}{2} g t^2,$$

en la que g es la aceleración de la fuerza de gravedad aproximadamente igual a 9,8 m/seg^2.

Calculemos la velocidad de la caída libre de un cuerpo en el momento de tiempo $t = 2$ seg. Para ello determinamos la velocidad media en cualquier intervalo de tiempo que siga inmediatamente al momento $t = 2$ seg, por ejemplo, en el intervalo entre $t = 2$ seg y $t_1 = 2{,}1$ seg, igual a:

$$t_1 - t = 0{,}1 \text{ seg}.$$

Señalando el espacio recorrido en el tiempo t por medio de la letra s, y en el tiempo t_1 por medio de la letra s_1, el espacio recorrido en el intervalo de tiempo $t_1 - t$ será igual a:

$$s_1 - s = \frac{1}{2} g t_1^2 - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g (t_1 + t)(t_1 + t).$$

La velocidad media de la caída en este intervalo de tiempo es:

$$v_{med} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{1}{2} g (t_1 + t).$$

Y en forma numérica:

$$v_{med} = \frac{1}{2} g (2{,}1 + 2) = 2{,}05\ g.$$

Dividamos cada vez por diez el intervalo de tiempo $t_1 - t$. Efectuando los cálculos obtenemos:

t	t_1	$t_1 + t$	$v_{med} = \frac{1}{2} g (t_1 + t)$	$v_{med} = A + \alpha$
2	2,1	4,1	2,05 g	$2g + \frac{g}{20}$
2	2,01	4,01	2,005 g	$2g + \frac{g}{200}$
2	2,001	4,001	2,0005 g	$2g + \frac{g}{2000}$
2	2,0001	4,0001	2,00005 g	$2g + \frac{g}{20\,000}$

En la última columna, la velocidad media aparece en forma de una suma de dos sumandos: la constante $A = 2g$ y la variable α, igual al quebrado, en el cual el numerador g es un número determinado y el denominador crece indefinidamente. Tal quebrado es una magnitud infinitamente pequeña.

Por lo tanto, la velocidad media variable es la suma de *la constante $2g$ y de la magnitud infinitamente pequeña α.* Por eso (§ 51), si $t_1 - t \to 0$ dicha velocidad tiene límite, igual a $2g$:

$$\lim_{t_1 - t \to 0} \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = 2g.$$

La velocidad media $2{,}05g$, $2{,}005g$, etc., calculada en los intervalos de tiempo igual a 0,1 seg, 0,01 seg, etc., es el valor aproximado de la velocidad en el momento de tiempo $t = 2$ seg., y este valor se aproxima tanto más al valor real cuanto menor sea el intervalo de tiempo tomado. *El límite de la velocidad media al tender a cero el intervalo de tiempo $t_1 - t$ es el valor de la velocidad v en el momento de tiempo t.*

Por lo tanto, en el momento $t = 2$ seg, la velocidad $v = 2\ g\ m/seg$.

Debe señalarse que han sido tomados momentos t_1 más tardíos que t. También se pueden tomar momentos anteriores: $t_1 = 1{,}9$; $t_1 = 1{,}99$; $t_1 = 1{,}999$, etc. En este caso, la velocidad media *resultará igual* a $1{,}95g$, $1{,}995g$, $1{,}9995g$, etc., y tendrá el mismo límite $2g$.

2°. Haremos ahora abstracción del movimiento concreto.

Supongamos que y es el espacio recorrido, x es el tiempo de movimiento, $f(x)$, la ley de dependencia entre el espacio recorrido y el tiempo de este movimiento,

$$y = f(x), \tag{1}$$

Para determinar la velocidad de movimiento en cualquier momento dado del tiempo de movimiento x, fijemos otro momento de tiempo $x + \Delta x$. Entonces el espacio recorrido durante el tiempo x, es

$$y = f(x), \tag{1}$$

y durante $x + \Delta x$,

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \tag{2}$$

El espacio recorrido durante el intervalo de tiempo Δx es la diferencia entre (2) y (1)

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Dividiendo el espacio Δy por el intervalo de tiempo Δx, obtenemos la velocidad media en el intervalo de tiempo Δx,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{3}$$

para un valor dado de x, ella es una magnitud variable: varía al variar el valor de Δx.

Supongamos que $\Delta x \to 0$; entonces la razón (3) tiene límite.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se llama velocidad del movimiento en el momento de tiempo x.

De este modo, *la velocidad de movimiento en el momento dado de tiempo es el límite de la razón del incremento del espacio respecto al incremento del tiempo al tender el incremento del tiempo a cero.*

3°. El método aplicado al determinar la velocidad de movimiento, puede emplearse también para determinar diferentes magnitudes físicas. Examinemos una de ellas: la capacidad calorífica de una substancia a una temperatura dada.

Del curso de física es conocido que para elevar diferentes temperaturas t de la substancia dada en un mismo número de grados Δt hay que consumir cantidades desiguales de calor ΔQ; por eso la razón $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ para la substancia dada no es constante y la cantidad de calor Q consumido para elevar la temperatura es una función no lineal de la temperatura t.

Por ejemplo, al calentar un kilogramo de hierro desde 0 grados hasta $t = 200°$, la cantidad Q de calor consumido por éste se determina con bastante exactitud por medio de la fórmula:

$$Q = 0{,}1053t + 0{,}000071t^2.$$

Aplicando esta fórmula se averigua la capacidad calorífica del hierro a $t°$, donde $0° \leqslant t \leqslant 200°$. Para simplificar la expresión designemos 0,000071 por medio de a y 0,1053 por medio de b, resultando

$$Q = bt + at^2.$$

Supongamos que al calentar 1 kg de hierro desde 0° hasta $t°$, consume Q calorías, y al calentar desde 0° hasta $(t + \Delta t)°$, consume $Q + \Delta Q$ calorías, siendo:

$$Q = bt + at^2, \tag{1}$$

$$Q + \Delta Q = b(t + \Delta t) + a(t + \Delta t)^2. \tag{2}$$

Restando (1) de (2) encontramos la magnitud (ΔQ), en la que ha variado la cantidad de calor Q al variar la temperatura en $\Delta t°$:

$$\Delta Q = b \cdot \Delta t + 2at \cdot \Delta t + a \cdot \Delta t^2. \tag{3}$$

Dividiendo (3) por Δt, obtenemos la cantidad de calor Q (la capacidad calorífica media) en el intervalo $[t, t + \Delta t]$:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = b + 2at + a \cdot \Delta t. \tag{4}$$

Observemos que $b + 2at$ es una magnitud constante, para una temperatura fija t, es decir, $b + 2at = C$.

El sumando $a \cdot \Delta t$ es una magnitud variable y depende del valor Δt. Al tender Δt a cero, $a \cdot \Delta t$ se hace una magnitud infinitamente pequeña, y la constante C se convierte en el límite de la velocidad media $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = C.$$

Este constante C *es el límite de la razón del incremento de la cantidad de calor respecto al incremento de la temperatura, al tender el incremento de la temperatura a cero, y se llama capacidad calorífica de substancia dada a la temperatura dada.*

Siendo, por ejemplo, $t = 50°$, se tiene

$$C = 0{,}1053 + 2 \cdot 0{,}000071 \cdot 50 = 0{,}1124 \text{ kcal}.$$

4°. Hemos determinado dos magnitudes: una mecánica que *es la velocidad de movimiento en un momento dado* del tiempo; y una física, la capacidad calorífica de una substancia a una temperatura dada. Cada una de ellas es el límite de la razón del incremento de la función respecto al incremento del argumento al tender el incremento del argumento a cero.

§ 73. La función derivada

1°. Definición. *El límite de la razón del incremento de la función $y = f(x)$ con respecto al incremento del argumento en el punto x, al tender el incremento del argumento a cero,*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se llama derivada de la función $f(x)$ en el punto x.

Si la derivada existe para cada valor de x del campo de determinación de la función $y = f(x)$, entonces ella es una nueva función de x y se llama *función derivada respecto a x de la función dada $f(x)$.*

Desde el punto de vista físico la derivada de $f(x)$ en el punto x es la *velocidad del cambio de la función $f(x)$ con respecto a su argumento para un valor dado de x.*

Por ejemplo, la capacidad calorífica de una substancia a la temperatura t es la velocidad del cambio de la cantidad de calor $Q(t)$ a la temperatura dada t.

2°. La función derivada se indica así: 1) se le coloca un acento a la función dada en el lugar donde se suele poner el exponente de la potencia; o 2) delante de la función dada se coloca el símbolo $\frac{d}{dx}$.

Si la función dada está designada por la letra y, su derivada puede ser designada por:

1) y'; se lee: "derivada de la función y", o

2) $\frac{dy}{dx}$; se lee; "de y" respecto a "de x".

Si la función dada está representada por el símbolo $f(x)$, su derivada puede ser representada así: 1) $f'(x)$, o también 2) $\frac{df(x)}{dx}$.

3°. *El cálculo de la derivada de una función dada se llama derivación.*

La regla general de la derivación (cálculo de la derivada) es la siguiente:

1) se halla el incremento Δy de la función, es decir, se busca la diferencia de los valores de la función, siendo los valores del argumento $x + \Delta x$ y x;

2) se halla la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, para lo cual se divide por Δx la igualdad obtenida anteriormente;

3) se halla el límite de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ al tender Δx a cero.

Ejemplo. Hállese la derivada de la función $y = x^3 + 1$ en cualquier punto x.

Solución. 1) $\Delta y = (x + \Delta x)^3 + 1 - (x^3 + 1)$.

Después de efectuar las operaciones:

$$\Delta y = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3;$$

$$2)\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x . \Delta x + \Delta x^2;$$

$$3)\ \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2) = 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0 = 3x^2.$$

4°. Indicaremos que la derivada de la función lineal $y = kx + b$ es una magnitud constante, igual a k.

En efecto, para la función lineal $y = kx + b$, se tiene:

$$\Delta y = k \cdot \Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k;$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k = k.$$

5°. Las derivadas se emplean a menudo en la técnica y las ciencias naturales. Ejemplos de derivadas: 1) durante el movimiento de un cuerpo, el espacio recorrido s es función del tiempo t; la velocidad del movimiento en el momento de tiempo dado t es la derivada del espacio s respecto al tiempo t, es decir,

$$v = \frac{ds}{dt};$$

2) durante el movimiento de rotación de un cuerpo sólido (por ejemplo, de un volante) (fig. 94) alrededor del eje Ox, el ángulo de rotación de éste φ, es función del tiempo t:

$$\varphi = f(t);$$

la velocidad angular ω en el momento de tiempo dado t es la derivada del ángulo de rotación respecto al tiempo, es decir,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt};$$

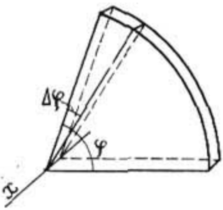


Fig. 94

3) al enfriarse un cuerpo, la temperatura T del mismo, es función del tiempo t,

$$T = f(t);$$

la velocidad de enfriamiento en el momento de tiempo t es la derivada de la temperatura T respecto al tiempo, es decir $\frac{dT}{dt}$;

4) la capacidad calorífica C para la temperatura dada t es la derivada de la cantidad de calor Q respecto a la temperatura t,

$$C = \frac{dQ}{dt};$$

5) al calentar una varilla, su dilatación Δl, como lo testimonian minuciosos ensayos, sólo se puede considerar de un modo aproximado, proporcional al cambio de temperatura Δt. Por eso, la función $l = f(t)$ no es lineal, y la razón $\frac{\Delta l}{\Delta t}$ es solamente el coeficiente medio de dilatación lineal en el segmento $[t, t + \Delta t]$. El coeficiente de dilatación lineal α, siendo el valor de la temperatura dada t, es la derivada de la longitud l respecto a la temperatura t,

$$\alpha = \frac{dl}{dt}.$$

§ 74. La tangente a la curva. Interpretación geométrica de la derivada

1°. Tomemos en la recta AB (fig. 95) un punto C y tracemos por él una recta CM, que no coincida con AB. Supongamos que la recta CM gira alrededor del punto C de tal modo que el ángulo γ, formado por las rectas, tiende a cero. La recta inmóvil AB se llama en este caso *posición límite* de la recta móvil CM.

2°. Supongamos que en la curva AB (fig. 96), el punto M se aproxima indefinidamente al punto fijo C; en este caso,

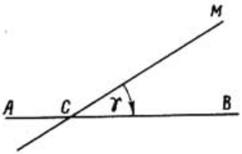


Fig. 95

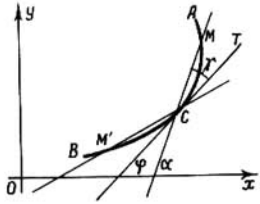


Fig. 96

la secante CM gira alrededor del punto C. Puede ocurrir que independientemente de la manera en que se aproxime el punto M a C en dirección de A a C o de B a C (en la figura 96 el punto M'), existe una misma recta CT que es la posición límite de la secante CM. *La recta CT, que es la posición límite de la secante CM, se llama tangente a la curva en el punto C.*

El punto C se llama *punto de contacto o de tangencia.*

Supongamos que el ángulo formado por la secante CM con el eje Ox es igual a α, y el ángulo formado por la tangente CT con el eje Ox es igual a φ; α es variable y φ, constante.

El ángulo γ formado por la tangente CT y la secante CM es igual a la diferencia $\alpha - \varphi$ (§ 16):

$$\alpha - \varphi = \gamma.$$

Según la definición de la tangente, el ángulo γ es una magnitud infinitamente pequeña, cuando $\cup MC \to 0$, por eso

$$\varphi = \lim_{\cup MC \to 0} \alpha \qquad (1)$$

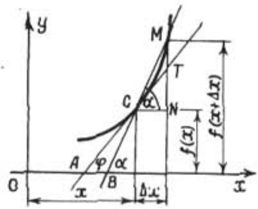
3°. T e o r e m a. *El coeficiente angular de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto x es igual a la derivada $f'(x)$ en el punto x.*

D e m o s t r a c i ó n. El coeficiente angular de la tangente:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\lim_{\cup MC \to 0} \alpha) = \lim_{\cup MC \to 0} \operatorname{tg} \alpha$$

según (1) y § 71, la fórmula (V).

Expresemos $\operatorname{tg} \alpha$ a través de las coordenadas de los puntos C y M (fig. 97). El punto de contacto C es fijo, sus coordenadas son números dados x y $f(x)$; el punto M es móvil, sus coordenadas son variables; los representaremos por



F i g. 97

$$x + \Delta x \text{ y } f(x + \Delta x).$$

Según la fórmula (VI) § 5:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Si el arco $CM \to 0$, entonces también $\Delta x \to 0$, ya que $|\Delta x| <$ la cuerda (del arco) $CM < \cup CM$.

Pasando al límite, para $\Delta x \to 0$ resulta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = f'(x)} \qquad \text{(I)}$$

ya que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \lim\limits_{\cup CM \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi$,

lo que se quería demostrar.

4°. Tiene lugar el teorema recíproco, que expresa el significado geométrico de la derivada: *si la función $y = f(x)$ tiene derivada en un punto x en este punto la gráfica de la función tendrá tangente y el coeficiente angular de esta tangente será igual al valor de la derivada $f'(x)$ en el punto x.*

D e m o s t r a c i ó n. Según la condición, existe el límite de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Pero la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la tangente del ángulo formado por la secante CM con el eje Ox (fig. 97).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha. \tag{1}$$

Por lo tanto, según la condición, existe el $\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\lim_{\Delta x \to 0} \alpha)$.

De la igualdad (1) se deduce:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Debido a la continuidad de arc tg, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arc\,tg} \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right).$$

Pero según la condición, existe $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, igual al número $f'(x)$

Por ello

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \operatorname{arc\,tg} f'(x).$$

Indicando $\operatorname{arc\,tg} f'(x) = \varphi$ se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = \varphi.$$

Por lo tanto, existe el límite de α. Así pues, existe una recta que pasa por el punto C, cuyo ángulo con el eje Ox es igual a $\lim \alpha$. Tal recta es la tangente en el punto dado $C\,[x, f(x)]$ y su coeficiente angular $\operatorname{tg} \varphi = f'(x)$.

5°. Observación. Si la tangente en el punto (x_1, y_1) de la curva $y = f(x)$ forma con Ox: a) un ángulo agudo φ, la derivada $f'(x_1) > 0$, puesto que $\operatorname{tg} \varphi > 0$ (fig. 98); b) un ángulo obtuso φ, la derivada $f'(x_1) < 0$, puesto que $\operatorname{tg} \varphi < 0$ (fig. 99). Si la tangente es paralela al eje Ox (fig. 110), el ángulo

$$\varphi = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad \text{y} \quad f'(x_1) = 0.$$

Si la tangente es perpendicular al eje Ox, la tendencia de α hacia $\frac{\pi}{2}$ puede conducir a un mismo límite infinito de la tangente, tanto "a la derecha" como "a la izquierda": $\operatorname{tg}\varphi = +\infty$ (fig. 101) o $\operatorname{tg} \varphi = -\infty$ (fig. 102), o dar "a la izquierda" y "a la derecha" límites infinitos de diferente signo (en la figura 103 en el punto C "a la izquierda" $\operatorname{tg}\varphi = +\infty$, y "a la derecha $\operatorname{tg} \varphi = -\infty$. En el primer caso se dice que la función $f(x)$, en los puntos A y B, tiene derivada infinita; en el segundo caso, en el punto C, no existe ni derivada finita ni infinita.

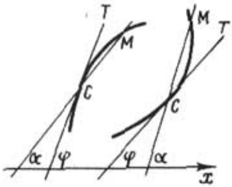


Fig. 98

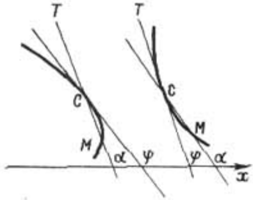


Fig. 99

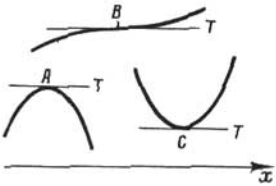


Fig. 100

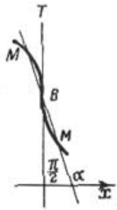


Fig. 101

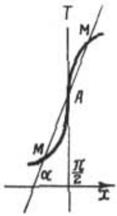


Fig. 102

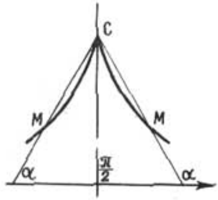


Fig. 103

Tengamos en cuenta que las derivadas infinitas se examinan solamente en los puntos de continuidad de la función $f(x)$ (fig. 101, 102).

6°. La ecuación de la tangente en el punto (x, y) a la curva $y = f(x)$, como ecuación de la recta que pasa por el punto dado (x, y), teniendo como coeficiente angular el valor de la derivada, en el punto x, $f'(x_1)$, es la siguiente:

$$\boxed{y - y_1 = f'_1(x_1)(x - x_1)} \qquad \text{(V)}$$

7°. La recta que pasa por el punto de contacto perpendicular a la tangente se llama *normal* a la curva. Según la condición de perpendicularidad mutua de las rectas, el coeficiente angular de la normal es $-\frac{1}{f'(x_1)}$ y la ecuación de la normal,

$$\boxed{y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)} \cdot (x - x_1)} \qquad \text{(VI)}$$

§ 75. Dependencia entre la derivabilidad y la continuidad de una función

1°. *Una función se llama derivable en el punto x si su derivada en este punto es finita.* La función $f(x)$ es derivable en el intervalo $a < x < b$, si su derivada $f'(x)$ es finita en cada punto del intervalo.

2°. Teorema. *Si la función $y = f(x)$ tiene derivada en un punto x, será continua en este punto.*

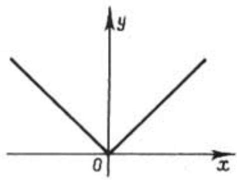


Fig. 104

Demostración. Escribamos la identidad:

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x,$$

(siempre consideramos que $\Delta x \neq 0$). Al tender Δx a cero, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiene un límite determinado (según la condición) y por lo tanto (§ 50,6°) es una magnitud acotada, y Δx es un infinitésimo. Por eso, el producto $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$ es una magnitud infinitamente pequeña, y su límite es igual a cero, es decir,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Por lo tanto, la función dada $y = f(x)$ es continua (§ 69).

1°. El teorema recíproco es falso: *una función continua puede no tener derivada*. Por ejemplo, la función: $y = |x|$ (fig. 104) en el punto $x = 0$ es continua. Por otra parte, en el punto $x = 0$ no existe una tangente determinada; la función no es derivable.

4°. Consecuencia. *La función no tiene derivada en el punto de discontinuidad.*

El genial matemático ruso N. Lobachevski expuso por primera vez de una manera nítida la distinción entre el concepto de continuidad y el de derivabilidad de las funciones.

CAPITULO VII

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

§ 76. Observación previa

1°. Al examinar dos o más funciones, se supondrá que cada una de las funciones consideradas es derivabe, es decir, que tiene derivada en un punto x tomado arbitrariamente.

2°. Las fórmulas para hallar las derivadas se llaman también fórmulas de derivación.

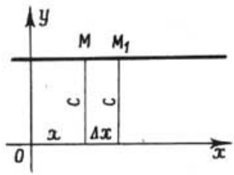


Fig. 105

§ 77. Derivada de una constante

Teorema. *Una función constante tiene en cualquier punto x derivada, igual a cero.*

Hipótesis: $y = c$ (fig. 105). Tesis: $c' = 0$.

Demostración. Para cualquier valor de x y para cualquier incremento Δx, el incremento Δy de la función es igual a cero; también es igual a cero la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Por eso $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, es decir,

$$\boxed{c' = 0.} \tag{1}$$

§ 78. Derivada de una potencia

1°. Teorema. *La derivada de la potencia del argumento es igual al exponente multiplicado por el argumento elevado el exponente disminuido en una unidad*, es decir, si $y = x^n$, se tiene $y' = (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que n es un número entero positivo. El incremento de la función

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n.$$

Aplicando la fórmula del binomio de Newton resulta:

$$\Delta y = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}\cdot \Delta x^2 +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-3} \Delta x^3 + \ldots + \Delta x^n - x^n,$$

o sea,

$$\Delta y = n\cdot x^{n-1}\Delta x +$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-3}\Delta x^3 + \ldots + \Delta x^n.$$

Dividiendo cada miembro de esta igualdad por Δx, resultará la razón:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n\cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}\Delta x +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-3}\cdot \Delta x^2 + \ldots + \Delta x^{n-1}.$$

Pasando al límite, para $\Delta x \to 0$, se tiene:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = n\cdot x^{n-1}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{(x^n)' = n\cdot x^{n-1}} \qquad \text{(II)}$$

O b s e r v a c i ó n. Este teorema subsiste también cuando el exponente es negativo, fraccionario e irracional, lo que será demostrado más adelante. Apliquemos esta fórmula siendo el exponente un número constante cualquiera.

3°. E j e m p l o s. 1. Hállese la derivada de la función: $y = x^4$.
S o l u c i ó n. Según la fórmula (II), $y' = 4\cdot x^3$.
2. Hállese la derivada de la función: $y = \sqrt[3]{x^2}$.
S o l u c i ó n. Representando la raíz en forma de una potencia de exponente fraccionario, se tiene

$$y = x^{\frac{2}{3}}.$$

Según la fórmula (II)·

$$y'=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}.$$

3. Hállese la derivada de la función: $y=\frac{1}{x^3}$.

Solución. Representando la fracción en forma de una potencia con exponente negativo, se tiene $y=x^{-3}$.

Aplicando la fórmula (II) $y'=-3\cdot x^{-3-1}=-3\cdot x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$.

4. Hállese la derivada de la función: $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Solución. $y=x^{-\frac{1}{2}}$. Aplicando la fórmula (II)

$$y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

4°. Consecuencia. *La derivada de x es igual a la unidad*, porque

$$x'=(x^1)'=1\cdot x^{1-1}=x^0=1.$$

§ 79. Derivada del producto de una magnitud constante *por una función*

1°. Teorema. *La derivada del producto de una magnitud constante por una función es igual al producto de esta constante por la derivada de la función*, es decir, si $y=c\cdot f(x)$, donde c es una constante, se tiene $y'=c\cdot f'(x)$.

Demostración. Hallemos Δy, es decir, la diferencia entre los valores de la función dada $c\cdot f(x)$, para los valores del argumento $x+\Delta x$ y x:

$$\Delta y=c\cdot f(x+\Delta x)-c\cdot f(x),$$

o

$$\Delta y=c[f(x+\Delta x)-f(x)].$$

Dividiendo esta igualdad por Δx obtenemos la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Hallemos la derivada (aplicando el § 54, 2°):

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=c\cdot f'(x).$$

Por lo tanto

$$\boxed{[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x),} \tag{III}$$

que era lo que se trataba de demostrar.

A veces, el enunciado del teorema demostrado se expresa así: *al derivar se puede sacar el factor numérico fuera del signo de la derivada.*

2°. Ejemplos. 1. Hállese la derivada de la función $y = 2 \cdot x^4$.

Solución. Según la fórmula (III) $y' = 2\,(x^4)$, y aplicando la fórmula (II).

$$y' = 2 \cdot 4x^3 = 8x^3.$$

2. Hállese la derivada de la función: $y = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$.

Solución. Representemos el quebrado y la raíz en forma de potencia con exponente negativo y fraccionario: $y = 4 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$.

Aplicando la fórmula (III) $y' = 4 \cdot (x^{-\frac{1}{2}})' = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{2}{x\sqrt{x}}$.

§ 80. Derivada de una suma algebraica de funciones

1°. Teorema. *La derivada de la suma algebraica de unas cuantas funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de estas funciones.*

Demostrémeslo, por ejemplo, para la suma de tres funciones: $u(x) + v(x) - z(x)$. Para abreviar la escritura, indicaremos las funciones mediante u, v, z. Así, $y = u + v - z$.

Tomemos arbitrariamente un valor determinado de x y alteremos su valor en la magnitud Δx. Entonces, u, v y z alterarán cada una su magnitud respectivamente en Δu, Δv, y Δz y por consiguiente, la función y cambiará su magnitud en Δy.

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (z + \Delta z),$$

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (z + \Delta z) - (u + v - z).$$

Después de abrir paréntesis, se tiene:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta z.$$

Dividiendo cada miembro de la igualdad obtenida por Δx, tenemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Hallamos la derivada:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x},$$

es decir,

$$\boxed{y'=[u(x)+v(x)-z(x)]'=u'(x)+v'(x)-z'(x),}\qquad \text{(IV)}$$

que era lo que se trataba de demostrar.

2°. Ejemplo. Hállese la derivada de la función:

$$y=\frac{3}{x^2}-\sqrt{x}+7.$$

Solución. Valiéndonos de exponentes negativo y fraccionario, se tiene:

$$y=3x^{-2}-x^{\frac{1}{2}}+7,$$

y es la suma algebraica de tres funciones: $3x^{-2}=u$, $x^{\frac{1}{2}}=v$ y $7=z$. Aplicando la fórmula (IV)

$$y'=(3x^{-2})'-(x^{\frac{1}{2}})'+(7)'.$$

Aplicando las fórmulas (III), (II) y (I)

$$y'=-6x^{-3}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+0,\quad \text{o}\quad y'=-\left(\frac{6}{x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

§ 81. Derivada del producto de funciones

1°. Teorema 1. *La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función multiplicada por la segunda función, más la derivada de la segunda función multiplicada por la primera función.*

Demostración. Supongamos que $y=u\cdot v$, donde u y v son funciones de x. Tomemos un valor arbitrariamente determinado x y alteremos su valor en la magnitud Δx. En ese caso, las funciones u, v e y alterarán respectivamente sus valores en Δu, Δv y Δy:

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v),$$

y el incremento de la función y será

$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-u\cdot v.$$

Abriendo los paréntesis y reduciendo los términos semejantes, resulta:

$$\Delta y=v\cdot\Delta u+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v.$$

Dividiendo los miembros de la igualdad obtenida por Δx obtenemos la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Pasando al límite, cuando $\Delta x\rightarrow 0$, se tiene:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Debe indicarse que se entienden por u y v los valores numéricos de las funciones $u(x)$ y $v(x)$ para un valor de x determinado, es decir, u y v no dependen de Δx. Por eso

$$\lim_{\Delta x\to 0}v=v,\quad \lim_{\Delta x\to 0}u=u.$$

Según la condición (§ 76), las funciones u y v tienen derivada, por lo tanto son continuas (§ 75). Debido a la continuidad de u (§ 69), $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$.

Según la definición, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ y $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$.

Por lo tanto,

$$y'=v\cdot u'+u\cdot v', \text{ o sea, } \boxed{(u\cdot v)'=u'v+v'u,} \qquad \text{(V)}$$

que era lo que se trataba de demostrar.

2°. Ejemplo. Hállese la derivada de la función:

$$y=(2x^2+3x)\cdot(3-2x).$$

Solución. La función dada es el producto de dos funciones:

$$2x^2+3x=u \text{ y } 3-2x=v.$$

Aplicando la fórmula (V), se tiene:

$$y'=(2x^2+3x)'\cdot(3-2x)+(3-2x)'\cdot(2x^2+3x)=$$
$$=(4x+3)\cdot(3-2x)+(-2)\cdot(2x^2+3x).$$

Abriendo paréntesis y reduciendo, resulta: $y'=3(3-4x^2)$.

3°. Teorema 2. *La derivada del producto de n funciones es igual a la suma de n productos obtenidos al multiplicar la derivada de cada una de estas funciones por todos los demás factores*, es decir.

$$\boxed{\begin{array}{c}(u_1\cdot u_2 \ldots u_n)'=u_1'u_2\cdot \ldots u_n+ \\ +u_2'u_1u_3 \ldots u_n+\ldots+u_n'u_1u_2 \ldots u_{n-1}\end{array}} \qquad \text{(VI)}$$

Demostración. Supongamos que se tiene el producto de tres funciones $u_1\cdot u_2\cdot u_3$. Tomando el producto $u_1\cdot u_2$ como una función, y derivando de acuerdo con la fórmula (V), resulta:

$$(u_1u_2u_3)'=[(u_1u_2)\cdot u_3]'=(u_1u_2)'u_3+u_3'(u_1u_2)=$$
$$=(u_1'u_2+u_2'u_1)\cdot u_3+u_3'u_1u_2=u_1'u_2u_3+u_2'u_1u_3+u_3'u_1u_2.$$

Tomando el producto de tres funciones, $u_1u_2u_3$, como una función y derivando se halla la derivada del producto de cuatro funciones, etc.

En general, sabiendo que la fórmula (VI) es cierta para el producto de m factores, se puede demostrar que también es cierta para el producto de $m+1$ factores.

Por lo tanto, el teorema es cierto para cualquier número n de factores.

§ 82. Derivada del quebrado

1°. Teorema. *La derivada del quebrado es igual a un quebrado cuyo numerador es la derivada del numerador multiplicada por el denominador, menos la derivada del denominador multiplicada por el numerador, y el denominador es el cuadrado del denominador dado.*

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que $y=\frac{u}{v}$, donde u y v son funciones de x. Tomemos un valor arbitrariamente determinado de x y supongamos además que el valor del denominador v no es igual a cero. Alteremos el valor x del argumento en la magnitud Δx. En este caso, las funciones u, v e y alterarán sus valores respectivamente en Δu, Δv y Δy: $y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$, y el incremento de la función y será

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}.$$

Reduciendo a un común denominador, después de restar resulta:

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v\,(v+\Delta v)}.$$

Dividiendo el numerador $v\Delta u-u\cdot\Delta v$ por Δx, obtenemos la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v+\Delta v)}.$$

Hallemos la derivada:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0}u\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}v\cdot(\lim\limits_{\Delta x\to 0}v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v)}.$$

Según la observación hecha en el párrafo anterior:

$$\lim_{\Delta x\to 0}v=v;\quad \lim_{\Delta x\to 0}u=u;\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u';\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v';$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v=0.$$

Por lo tanto,

$$y'=\frac{v\cdot u'-u\cdot v'}{v^2},$$

o sea

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2},}\qquad\text{(VII)}$$

que era lo que se trataba de demostrar.

2°. E j e m p l o. **Hállese la derivada de la función:**

$$y=\frac{x^2+7}{x^2-7}\,.$$

S o l u c i ó n. Aplicando la fórmula (VII) y haciendo $x^2+7=u$, $x^2-7=v$, resulta:

$$y'=\frac{(x^2+7)'\cdot(x^2-7)-(x^2-7)'\cdot(x^2+7)}{(x^2-7)^2}\,,$$

o sea,

$$y'=\frac{2x\,(x^2-7)-2x\,(x^2+7)}{(x^2-7)^2}=\frac{2x\,(x^2-7-x^2-7)}{(x^2-7)^2}=-\frac{28x}{(x^2-7)^2}\,.$$

3°. C o n s e c u e n c i a s. **1.** Si el denominador del quebrado es un número c,

$$y=\frac{u\,(x)}{c}=\frac{1}{c}\cdot u\,(x),$$

y la derivada se halla como si se tratara de una función entera. En este caso

$$\boxed{\left[\frac{u\,(x)}{c}\right]'=\frac{u'\,(x)}{c}\,,} \qquad \text{(VIII)}$$

es decir, *si el denominador de un quebrado es un número c, la derivada del quebrado será igual a la derivada del numerador dividida por el número c.*

2. Si el numerador de un quebrado es un número c, o sea,

$$y=\frac{c}{v\,(x)}=\frac{c}{v}\,,$$

según la fórmula (VII):

$$y'=\left(\frac{c}{v}\right)'=\frac{c'v-v'c}{v^2}=\frac{0\cdot v-v'\cdot c}{v^2}=-\frac{c\cdot v'}{v^2}\,,$$

o

$$\boxed{\left[\frac{c}{v\,(x)}\right]'=-\frac{c\cdot v'\,(x)}{v^2\,(x)}\,,} \qquad \text{(IX)}$$

es decir, *si el numerador de un quebrado es el número c, la derivada es igual al producto de la derivada del denominador por el número c, tomado con signo contrario, y dividido por el cuadrado del denominador.*

4°. E j e m p l o. Hállese la derivada de la función: $y=\frac{3x^4}{4a}-\frac{3a^2}{x^2}$.

S o l u c i ó n: $y'=\left(\frac{3x^4}{4a}\right)'-\left(\frac{3a^2}{x^2}\right)'$.

Las derivadas de los quebrados se hallan aplicando las fórmulas correspondientes (VIII) y (IX).

Se obtiene:

$$y'=\frac{(3x^4)'}{4a}-\frac{-3a^2(x^2)'}{(x^2)^2}=\frac{3\cdot 4x^3}{4a}+\frac{3a^2\cdot 2x}{x^4}=\frac{3x^3}{a}+\frac{6a^2}{x^3}.$$

§ 83. Observación

Se ha indicado ya que la función se llama derivable si tiene derivada. De los teoremas (fórmulas II—IX) se deduce que *la función obtenida mediante la adición substracción, multiplicación y división de funciones derivables es una función derivable.*

§ 84. Función de función

1°. E j e m p l o s. 1. Sea $y=\sqrt{2px}$. Si hacemos

$$2px=u,$$

se ve que u es función de x, por ejemplo, $u=\varphi(x)$.

En ese caso, la función dada $y=\sqrt{2px}=\sqrt{u}$ representa una función de u, que a su vez es función de x. Inscribiéndola con símbolos, si $y=f(u)$, y $u=\varphi(x)$, se tiene

$$y=f[\varphi(x)].$$

2. $y=\operatorname{sen} x^3$ es una función de función porque si hacemos $x^3=u$, se tiene $u=\varphi(x)$. En este caso, $y=\operatorname{sen} u=$ $=\operatorname{sen}\varphi(x)$ es una función de función.

3. A veces aparecen funciones de funciones más complicadas. Por ejemplo:

$$y=\lg(\operatorname{sen} x^3).$$

En este caso, sen x^3 es una función de función y, a su vez, se halla el logaritmo de la misma. Así pues, el logaritmo es una función de sen u; sen u es a su vez una función de u, y u es una función de x.

Por medio de símbolos, esta función puede inscribirse así:

$$y = F\{f[\varphi(x)]\}.$$

A la función de función se le llama **función compuesta**.

§ 85. Derivada de una función de función

1°. Teorema. *Si y es una función derivable de u, y u es una función derivable de x, se tiene la derivada de y respecto a x, es igual a la derivada de y respecto a u, multiplicada por la derivada de u respecto a x.*

Demostración. Supongamos que al valor de x corresponde un valor determinado de $u = \varphi(x)$, y al valor de u corresponde un valor determinado de $y = f(u)$. Demos a x un incremento arbitrario Δx. La alteración del valor del argumento x en la magnitud Δx origina la alteración del valor de la función u en la magnitud Δu, lo que origina a su vez una alteración del valor de la función y en la magnitud Δy. Supongamos que Δu, lo mismo que Δx, es siempre distinta de cero *, es decir,

$$\Delta u \neq 0 \text{ y } \Delta x \neq 0$$

Según la hipótesis del teorema, las razones $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ y $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tienen límites, iguales respectivamente al valor de la derivada $f'(u)$ y de la derivada $\varphi'(x)$, es decir,

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) \text{ y } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x). \tag{1}$$

Las funciones $f(u)$ y $\varphi(x)$ son continuas (§ 75); por eso, la tendencia a cero de Δx origina la tendencia a cero de Δu y Δy (§ 69). En consecuencia, en la igualdad (1) la tendencia a cero de Δu se puede sustituir por la tendencia a cero de Δx. Entonces, las igualdades (1) se inscribirán así:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) \text{ y } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x). \tag{2}$$

---

* Se puede demostrar que el teorema subsiste en el caso de que Δu se anule para ciertos valores de Δx arbitrariamente pequeños.

Multiplicando ambas igualdades, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot \varphi'(x). \qquad (3)$$

Aplicando el teorema del límite de un producto (§ 54), en el miembro izquierdo de la igualdad resulta:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo el primer miembro de la igualdad (3) por $\frac{dy}{dx}$, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x),$$

que era lo que se trataba de demostrar.

Para el empleo práctico es más cómoda otra forma de esta fórmula:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'_u(u) \cdot u'_x,} \qquad (\mathrm{X})$$

que se obtiene sustituyendo $\varphi'(x)$ por u'_x.

2°. Por medio del procedimiento expuesto se puede demostrar que la fórmula (X) es aplicable también en el caso en que la función dada esté compuesta de mayor número de funciones intermedias. Se puede demostrar que si $y = f(u)$, siendo $u = \varphi(t)$ y $t = \psi(x)$, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(t) \cdot \psi'(x).$$

3°. Ejemplo. Hállese la derivada de la función: $y = (ax + b)^n$.

Solución. Si hacemos $ax + b = u$, vemos que $y = u^n$ es una función de función. Por eso, derivando respecto a u como función potencial y aplicando simultáneamente la fórmula (X) obtenemos:

$$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'.$$

Sustituyendo u por $ax + b$, se tiene:

$$y' = n \cdot (ax + b)^{n-1} \cdot (ax + b)'$$

o, teniendo en cuenta que $(ax + b)' = a$,

$$y' = an\,(ax + b)^{n-1}.$$

4°.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } u = \varphi(x), \\ \text{resulta } (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', \end{array}} \qquad (\mathrm{XI})$$

es decir, *la derivada de la potencia de una función es igual al exponente multiplicado por la base elevada al exponente disminuido en una unidad, y multiplicado por la derivada de la base de la potencia.*

El conocimiento de la fórmula (X) tiene enorme importancia para dominar *la* técnica de *la* diferenciación.

5°. Ejemplo. Hállese la derivada de la función:

$$y=(5+3x^3)^{10}\cdot(3x^2+8)^5.$$

Solución. De acuerdo con la fórmula de la derivada de un producto (V):

$$y'=[(5+3x^3)^{10}]'\cdot(3x^2+8)^5+[(3x^2+8)^5]'\cdot(5+3x^3)^{10}.$$

Las derivadas $[(5+3x^3)^{10}]'$ y $[(3x^2+8)^5]'$ se hallan por la fórmula (XI):

$$y'=10\,(5+3x^3)^9\cdot 9x^2\cdot(3x^2+8)^5+5\,(3x^2+8)^4\cdot 6x\cdot(5+3x^3)^{10}.$$

Sacando fuera de paréntesis los factores comunes, resulta:

$$y'=30x\,(5+3x^3)^9\cdot(3x^2+8)^4\cdot[3x\,(3x^2+8)+(5+3x^3)].$$

Después de efectuar las operaciones contenidas en los paréntesis cuadrados, se tiene:

$$y'=30x\,(5+3x^3)^9\cdot(3x^2+8)^4\cdot(12x^3+24x+5).$$

6°. Ejemplo. Hallar la derivada de la función: $y=\frac{2x-1}{\sqrt{3-x^2}}$.

Solución. Derivamos la función de acuerdo con la fórmula (VII) de la derivada del quebrado:

$$y'=\frac{(2x-1)\cdot(3-x^2)^{\frac{1}{2}}-[(3-x^2)^{\frac{1}{2}}]'\cdot(2x-1)}{[(3-x^2)^{\frac{1}{2}}]^2}.$$

La derivada de $(3-x^2)^{\frac{1}{2}}$ se halla aplicando la fórmula (XI):

$$y'=\frac{2\,(3-x^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\,(3-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\,(2x-1)}{3-x^2}=$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt{3-x^2}+\frac{x\,(2x-1)}{\sqrt{3-x^2}}}{3-x^2}=\frac{\frac{2\,(3-x^2)+x\,(2x-1)}{\sqrt{3-x^2}}}{3-x^2}=$$

$$=\frac{6-2x^2+2x^2-x}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}=\frac{6-x}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}.$$

§ 86. Límite de la razon del seno respecto al arco

T e o r e m a. *El límite de la razón del sen z respecto a z cuando z tiende a cero, es igual a 1*, es decir,

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z}=1.$$

D e m o s t r a c i ó n. Observemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(-z)}{-z}=\frac{-\operatorname{sen} z}{-z}=\frac{\operatorname{sen} z}{z}.$$

Por esto es suficiente analizar el caso en que $z>0$. No es posible aplicar a la razón $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ el teorema del límite del cociente, ya que el denominador tiene el cero como límite. Analicemos el sentido geométrico de z y $\operatorname{sen} z$.

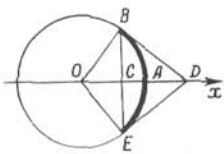


Fig. 106

Consideremos un arco BE (fig. 106), menor que la semicircunferencia, y tracemos la cuerda BE que le subtiende, el radio OA, perpendicular a la cuerda BE, y las tangentes BD y ED a la circunferencia en los puntos B y E. De la igualdad de los triángulos rectángulos OBD y OED se deduce que las tangentes tienen un punto común D y que $BD=DE$.

La longitud del arco BE de la circunferencia es mayor que la cuerda BE que le subtiende, pero, es menor que el perímetro de la quebrada BDE, circunscrita en torno a este arco con los extremos comunes a él.

Entonces,

$$2BC<2\cup AB<2BD.$$

O sea:

$$BC<\cup AB<BD.$$

Designemos la medida en radianes del arco AB a través de z. Si $R=1$, $BC=\operatorname{sen} z$ y $BD=\operatorname{tg} z$, de donde

$$\operatorname{sen} z<z<\operatorname{tg} z.$$

Dividiendo las desigualdades por $\operatorname{sen} z$, se tiene:

$$1<\frac{z}{\operatorname{sen} z}<\frac{1}{\cos z},$$

$$1 > \frac{\operatorname{sen} z}{z} > \cos z.$$

Cuando $z \to 0$, el límite de 1 y el límite de $\cos z$ son iguales a 1, y como la razón $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ se encuentra entre 1 y $\cos \alpha$, de acuerdo con (§ 57), su límite también es igual a 1.

Por lo tanto,

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1.$$

§ 87. Derivadas de las funciones trigonométricas

1°. *La derivada de sen x es igual a cos x.*

D e m o s t r a c i ó n. Si $y = \operatorname{sen} x$, se tiene que $\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x$. Aplicando la fórmula $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$, resulta:

$$\Delta y = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}.$$

Hallamos la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\left(\text{para lo cual es suficiente dividir por } \Delta x \text{ solamente el factor sen } \frac{\Delta x}{2}\right)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

La derivada será $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$.

Como el coseno es una función continua, segun (§ 71, 1°):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos \lim_{\Delta x \to 0} \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Para hallar $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$, hacemos la substitución $\frac{\Delta x}{2} = z$. Entonces, $\Delta x = 2z$ y $z \to 0$, si $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{2z} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\frac{dy}{dx}=2\cdot\cos x\cdot\frac{1}{2}=\cos x$, que era lo que se trataba de demostrar.

2°. Si $u=\varphi(x)$, se tiene:

$$\boxed{(\operatorname{sen} u)'=\cos u\cdot u'} \qquad \text{(XII)}$$

Ejemplo. Hállese la derivada de la función: $y=\operatorname{sen}(2-3x)$.
Solución. Según la fórmula (XII):

$$y'=\cos(2-3x)\cdot(2-3x)'=-3\cdot\cos(2-3x).$$

3°. *La derivada de cos x es igual a —sen x.*

Demostración. Se sabe que $\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. De aquí que

$$(\cos x)'=\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(-1)=-\operatorname{sen} x,$$

puesto que $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=-1$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen} x$, que era lo que se trataba de demostrar.

4°. Si $u=\varphi(x)$, se tiene:

$$\boxed{(\cos u)'=-\operatorname{sen} u\cdot u'} \qquad \text{(XIII)}$$

5°. *La derivada de tg x es igual a* $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Demostración. Como $\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, al aplicar la fórmula de la derivada de un quebrado (VII), se tiene:

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x-(-\operatorname{sen} x)\cdot\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}=$$
$$\frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

que era lo que se trataba de demostrar.

6°. Si $u=\varphi(x)$, se tiene:

$$\boxed{(\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'} \qquad \text{(XIV)}$$

7°. *La derivada de* $\operatorname{cotg} x$ *es igual a* $-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

D e m o s t r a c i ó n. Como $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, al aplicar la fórmula (VII), se tiene:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

que era lo que se trataba de demostrar.

8°. Si $u = \varphi(x)$, se tiene:

$$\boxed{(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot u'} \qquad \text{(XV)}$$

9°. E j e m p l o s. 1. Hállese la derivada de la función:

$$y = \operatorname{ctg} \frac{2}{x}.$$

S o l u c i ó n. Aplicando la fórmula (XV), resulta:

$$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{2}{x}} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{2}{x}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{2}{x}}.$$

2. Hállese la derivada de la función: $y = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 2x$.

S o l u c i ó n. La función dada es potencial y se puede escribir así: $y' = \frac{1}{4} (\operatorname{sen} 2x)^4$. Por eso derivamos de acuerdo con la fórmula de una potencia (XI):

$$y' = \frac{1}{4} \cdot 4 (\operatorname{sen} 2x)^3 \cdot (\operatorname{sen} 2x)'.$$

Se halla la derivada de $\operatorname{sen} 2x$ por la fórmula (XII):

$y' = (\operatorname{sen} 2x)^3 \cdot \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \operatorname{sen}^3 2x \cdot \cos 2x = \operatorname{sen}^2 2x \cdot \operatorname{sen} 4x.$

3. Hállese la derivada de la función: $y = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

S o l u c i ó n. La función dada es potencial y la escribimos así:

$$y = [1 - (\operatorname{tg} x)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Según la fórmula (XI):

$$y' = \frac{1}{2}\,[1-(\operatorname{tg} x)^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot [1-(\operatorname{tg} x)^2]' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}} \cdot (-2\operatorname{tg} x)\cdot(\operatorname{tg} x)' =$$

$$= -\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}\cdot\cos^2 x} = -\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x\,\sqrt{\cos 2x}}\,.$$

§ 88. Dos sistemas de logaritmos. El número e. Paso de un sistema de logaritmos a otro

1°. La función $y = \log_a x$ se llama logarítmica. A y se le llama logaritmo de x respecto a la base a. Se supone que la base $a > 0$, $a \neq 1$, y que el número $x > 0$. Si la base $a = 10$, el logaritmo se llama decimal y se designa por $\lg x$ sin indicar la base:

$$\log_{10} x = \lg x.$$

La sencillez de las propiedades de los logaritmos decimales los hace muy cómodos para su empleo en los cálculos. En las cuestiones teóricas tienen gran aplicación y resultan más convenientes los logaritmos cuya base es el límite de la expresión:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m,$$

cuando $|m| \to \infty$.

El académico Leonardo Euler (1707—1783) de Petersburgo, investigó la fórmula * siguiente para el cálculo de este límite:

$$\lim_{|m|\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots \quad (1)$$

y lo designó por medio de la letra e:

$$\lim_{|m|\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e,$$

El número e es irracional, es decir, se expresa por medio de una fracción decimal infinita no periódica, y puede ser

* La fórmula fue descubierta por Daniel Bernoulli.

hallado aplicando la fórmula (1) con el grado de aproximación que se desee. En la suma:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\approx e.$$

el error no será mayor que $\frac{1}{k\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots k}$,

$$e=2{,}718281828459045\ldots$$

El número e juega un gran papel en la ciencia: e se toma como base de la función exponencial e^x y también como base de los logaritmos; muchos problemas de las matemáticas, la técnica y las ciencias naturales tienen su resolución en forma de expresiones que contienen la función e^{kx}.

Los logaritmos de los números, cuya base es el número e se llaman *logaritmos naturales*. Éstos se designan por el símbolo *ln* sin indicación de la base:

$$\log_e x=\ln x.$$

2°. Paso de un sistema de logaritmos a otro. Supongamos que se conocen los logaritmos de base e de unos números x, siendo necesario encontrar sus logaritmos de base a. Según la definición de logaritmo se tiene

$$x=a^{\log_a^x}\quad \text{y}\quad x=e^{\ln x},$$

de donde

$$a^{\log_a^x}=e^{\ln x}.$$

Logaritmemos esta igualdad según los logaritmos conocidos, es decir, con base e:

$$\log_a^x\cdot\ln a=\ln x\cdot\ln e=\ln x,$$

ya que $\ln e=1$. De aquí se obtiene

$$\boxed{\log_a^x=\ln x\cdot\frac{1}{\ln a},}\qquad\text{(A)}$$

o sea, *para obtener el logaritmo respecto a una nueva base, es suficiente multiplicar el logaritmo conocido por el* *número recíproco al logaritmo de la nueva base, respecto a la base antigua.*

El factor constante $\frac{1}{\ln a}$ se llama módulo de paso de la base e a la base a.

3°. Tomando en la fórmula (A) $x = N$ y suponiendo conocidos los logaritmos decimales, se obtiene la fórmula de paso de los logaritmos decimales a los naturales:

$$\boxed{\ln N = \lg N \cdot \frac{1}{\lg e}\,.} \tag{1}$$

Tomando $a = 10$ y $x = N$, se obtiene la fórmula de paso de los logaritmos naturales a los decimales:

$$\boxed{\lg N = \ln N \cdot \frac{1}{\ln 10}\,.} \tag{2}$$

Multiplicando las igualdades (1) y (2) se halla que

$$\lg e \cdot \ln 10 = 1,$$

es decir, $\lg e$ y $\ln 10$ son números mútuamente inversos

$$\lg e = 0{,}4342945, \qquad \ln 10 = 2{,}302585,$$

$$\frac{1}{\lg e} = 2{,}302585, \qquad \frac{1}{\ln 10} = 0{,}4342945.$$

Las fórmulas (1) y (2) se pueden escribir así:

$$\ln N = \ln N \cdot \ln 10$$

$$\lg N = \ln N \cdot \lg e.$$

4°. Mostremos cómo pasar de la base a de la potencia a^x a la base e.

Por definición del logaritmo, el número

$$a = e^{\ln a}.$$

Elevando a la potencia x ambos miembros de la igualdad, se obtiene:

$$a^x = e^{x \ln a}. \tag{B}$$

§ 89. Derivada del logaritmo

1°. *La derivada del* ln *es* $\frac{1}{x}$.

Demostración. Para $y = \ln x$, se tiene:

$$\Delta y = \ln (x + \Delta x) - \ln x,$$

$$\Delta y = \ln \frac{x + \Delta x}{x},$$

es decir

$$\Delta y = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Para hallar la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, se multiplica el segundo miembro de la igualdad por $\frac{1}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Indicando $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{m}$, obtenemos $\frac{1}{\Delta x} = \frac{m}{x} = \frac{1}{x} \cdot m$, por lo tanto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot m \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Como $m \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, se tiene que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

En el segundo miembro de la igualdad obtenida, la variable es m (x es invariable), y si $\Delta x \to 0$, se tiene $|m| = \left|\frac{x}{\Delta x}\right| \to \infty$.

Hallando el límite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para $\Delta x \to 0$ y $|m| \to \infty$, tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{|m| \to \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m,$$

y debido a la continuidad del logaritmo, según § 71, 1°, obtenemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \ln \lim_{|m| \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Pero

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=(\ln x)\ , \ \text{y} \lim_{|m|\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=e.$$

Por eso

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\cdot \ln e,$$

y como $\ln e=\log_e e=1$, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, que era lo que se trataba de demostrar.

2°. Si $u=\varphi(x)$, se tiene

$$\boxed{(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'} \qquad \text{(XVI)}$$

3°. *La derivada del* $\log a^x$ *es igual a* $\frac{1}{x\ln a}$.

D e m o s t r a c i ó n. Según la regla de paso de un sistema de logaritmos a otro se tiene:

$$\log_a x=\ln x\cdot\frac{1}{\ln a}.$$

Como $\frac{1}{\ln a}$ es el factor constante, según la fórmula (III) y (XVI):

$$(\log_a x)'=(\ln x)'\cdot\frac{1}{\ln a},$$

y por lo tanto $(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$, que era lo que se trataba de demostrar.

4°. Si $u=\varphi(x)$, se tiene:

$$\boxed{y'=(\log_a u)'=\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'.} \qquad \text{(XVII)}$$

5°. E j e m p l o s. 1. Hállese la derivada de la función:

$$y=\log_a(x^2+4).$$

S o l u c i ó n. Aplicando la fórmula (XVII) resulta:

$$y'=\frac{1}{(x^2+4)\cdot\ln a}\cdot(x^2+4)'=\frac{2x}{(x^2+4)\cdot\ln a}.$$

2. Hállese la derivada de la función: $y=\ln(x^2+4)^2$.

S o l u c i ó n. Al derivar una función logarítmica es conveniente, en primer lugar, tomar el logaritmo, en el caso de que esto sea posible, ya que facilita la determinación de la derivada. Una vez tomado el logaritmo de la potencia $(x^2+4)^2$, se tiene:

$$y=2\cdot\ln(x^2+4).$$

Aplicando las fórmulas (III) y (XVI), resulta:

$$y'=2\cdot\frac{1}{x^2+4}\cdot(x^2+4)'=\frac{4x}{x^2+4}.$$

3. Hállese la derivada de la función: $y=\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}$.

S o l u c i ó n. Una vez tomados los logaritmos de la raíz y del quebrado, se tiene:

$$y=\frac{1}{2}\cdot\ln(1+\operatorname{sen}x)-\frac{1}{2}\ln(1-\operatorname{sen}x).$$

Derivando la diferencia y aplicando las fórmulas (III), (XVI) y (XII), hallamos:

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{sen}x}\cdot\cos x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\cdot(-\cos x)=$$

$$=\frac{\cos x}{2}\left(\frac{1}{1+\operatorname{sen}x}+\frac{1}{1-\operatorname{sen}x}\right)=\frac{\cos x}{2}\cdot\frac{2}{1-\operatorname{sen}^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}.$$

El resultado es muy sencillo: $\frac{1}{\cos x}$. Examinando atentamente la función que se deriva, se ve que se la puede simplificar, transformándola según las fórmulas trigonométricas. En efecto,

$$\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

$$y=\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}=\ln\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

Hallemos la derivada:

$$y' = \left[\ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right]' = \frac{1}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)} \times$$

$$\times \left(- \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)} \right) \cdot \left(- \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)} = \frac{1}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \frac{1}{\cos x} .$$

¿Se evita dedicar energías y tiempo al simplificar previamente la función derivada? Es evidente que no. La solución se ha hecho más larga y ha exigido la aplicación de varias fórmulas trigonométricas, mientras que en el primer caso, por el contrario, se ha empleado sólo una fórmula. Así pués, las simplificaciones previas de la función dada no siempre aceleran la solución, por lo que al derivar no suele recurrirse a ellas.

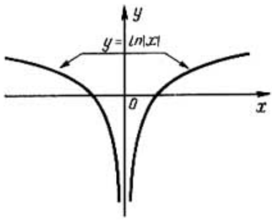


Fig. 107

5°. *La derivada de la función* $\ln |x|$ *es igual a* $\frac{1}{x}$.

Demostración. Ante todo anotemos que la función $z = ln|x|$ está definida en el conjunto de todos los números positivos y negativos; para $x = 0$ no está definida (fig. 107). En otras palabras, la función $y = \ln|x|$ está definida en los intervalos $-\infty < x < 0$ y $0 < x < +\infty$.

Si $x > 0$, entonces $|x| = x$, y $\ln |x| = \ln x$, $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$, y $\ln |x| = \ln (-x)$,

$$(\ln |x|)' = [\ln (-x)]' = \frac{1}{-x} (-x)' = \frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} .$$

De este modo, para cualquier valor $x \neq 0$

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} .$$

§ 90. Derivada de la función inversa

Teorema. *Si la función $x = f(y)$ es estrictamente monótona tiene en el punto y derivada $f'(y)$, distinta de cero, la función inversa $y = \bar{f}(x)$ tiene derivada en el punto x, correspondiente al punto y, y además ella es igual a la magnitud inversa de la derivada de la función directa en el punto y,*

$$\boxed{y'_x = \frac{1}{x'_y}\ .} \qquad \text{(XVIII)}$$

Demostración. Hallemos la derivada de la función $x = f(y)$. Dando a y un incremento $\Delta y \neq 0$, la función $x = f(y)$ recibirá un incremento Δx, $x + \Delta x = f(y + \Delta y)$. Por ser la función $x = f(y)$ estrictamente monótona,

$$x + \Delta x \neq x, \text{ es decir, } \Delta x \neq 0.$$

Entonces

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}, \text{ y } y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

La tendencia a cero de Δx se puede sustituir por la tendencia a cero de Δy, ya que en caso de la continuidad de la función $x = f(y)$ $\Delta x \to 0$ si $\Delta y \to 0$, y gracias a que la correspondencia entre los valores de Δx y Δy es bimívoca, se tiene también: $\Delta y \to 0$ si $\Delta x \to 0$. Por lo tanto:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'_y}.$$

que es lo que se trataba de demostrar.

§ 91. Derivada de la función exponencial

1°. La función exponencial $y = a^x$, la consideramos como función inversa a la función logarítmica: $x = \log_a y$, y que satisface las condiciones del teorema § 90.

Según la fórmula (XVIII) se tiene:

$$(a^x)'_x = \frac{1}{(\log_a y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y \cdot \ln a}} = y \cdot \ln a.$$

Sustituyendo y por a^x, se tiene:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a} \qquad \text{(XIXa)}$$

2°. Si la base $a=e$, es decir, si $y=e^x$, resulta:

$$\boxed{(e^x)'=e^x,} \qquad \text{(XXa)}$$

porque $\ln a=\ln e=1$.

3°. Si $u=\varphi(x)$, se tiene:

$$\boxed{y'=(a^u)'=a^u\cdot u'\cdot\ln a} \qquad \text{(XIX)}$$

$$\boxed{y'=(e^u)'=e^u\cdot u'} \qquad \text{(XX)}$$

§ 92. Derivada de la potencia con exponente arbitrario

1°. Demostremos la fórmula (II) de la derivada de una potencia de exponente fraccionario e irracional, que fue dada sin demostración. Examinaremos solamente el caso en que las bases sean positivas.

En la ecuación $y=x^n$ $x>0$, n es un número fraccionario o irracional. Tomando $y=x^n$, se tiene según el § 88,4°:

$$y=e^{n\ln x}.$$

Según la fórmula (XX):

$$y'=(e^{n\ln x})'=e^{n\ln x}\cdot n\cdot\frac{1}{x}=x^n\cdot n\cdot\frac{1}{x}=n\cdot x^{n-1}.$$

Por lo tanto, $(x^n)'=nx^{n-1}$, que era lo que se trataba de demostrar.

2°. *La función u^v, en la que la base u y el exponente v son funciones de x, se llama función exponencial compuesta.*

Suponiendo que $u>0$ y que las funciones u y v son derivables respecto a x, demostraremos que u^v tiene derivada.

Tomando $y=u^v$, se tiene (según el § 88,4°):

$$y=e^{v\ln u}, \text{ o } u^v=e^{v\ln u}.$$

Como $e^{v\cdot\ln u}$ tiene derivada, u^v también tendrá derivada, que se halla por medio de la fórmula (XX).

3°. Ejemplos. 1. Hállese la derivada de la función: $y=x^x$.

Solución. $x^x=e^{x\cdot\ln x}$. Según la fórmula (XX):

$$y'=(e^{x\cdot\ln x})'=e^{x\cdot\ln x}\cdot(x\cdot\ln x)'=e^{x\cdot\ln x}\cdot(\ln x+1)=x^x\cdot(\ln x+1).$$

2. Hállese la derivada de la función: $y=(\cos x)^{\operatorname{sen} x}$.

Solución. $(\cos x)^{\operatorname{sen} x}=e^{\operatorname{sen} x\cdot\ln\cos x}$,

$$y'=(e^{\operatorname{sen} x\cdot\ln\cos x})'=e^{\operatorname{sen} x\cdot\ln\cos x}\cdot(\operatorname{sen} x\cdot\ln\cos x)'=$$

$$=e^{\operatorname{sen} x\cdot\ln\cos x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln\cos x-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\operatorname{sen} x\right)=$$

$$=(\cos x)^{\operatorname{sen} x}\cdot(\cos x\cdot\ln\cos x-\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{tg} x).$$

§ 93. Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

1°. $y=\operatorname{arc\,sen} x$, y $=\operatorname{arc\,cos} x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$ e $y=\operatorname{arc\,cotg} x$ son funciones inversas respectivamente a las funciones: $x=\operatorname{sen} y$, $x=\cos y$, $x=\operatorname{tg} y$ y $x=\operatorname{cotg} y$, las cuales satisfacen las condiciones del teorema del § 90. Por eso sus derivadas las hallamos según la fórmula (XVIII).

2°. $$(\operatorname{arc\,sen} x)'_x=\frac{1}{(\operatorname{sen} y)'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}}\;{}^{*}.$$

Como $\operatorname{sen} y=x$, sustituyendo $\operatorname{sen}^2 y$ por x^2, resulta:

$$\boxed{(\operatorname{arc\,sen} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad \text{(XXIa)}$$

3°. $$(\operatorname{arc\,cos} x)'_x=\frac{1}{(\cos y)'_y}=-\frac{1}{\operatorname{sen} y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}\;{}^{**},$$

o sea

$$\boxed{(\operatorname{arc\,cos} x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad \text{(XXIIa)}$$

4°. $$(\operatorname{arc\,tg} x)'_x=\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y}=\frac{1}{\cos^2 y}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}.$$

Como $\operatorname{tg} y=x$, sustituyendo $\operatorname{tg}^2 y$ por x^2, resulta:

$$\boxed{(\operatorname{arc\,tg} x)'=\frac{1}{1+x^2}} \qquad \text{(XXIIIa)}$$

---

* Delante de la raíz se pone el signo más porque $\cos y<0$, puesto que $-\frac{\pi}{2}<y<+\frac{\pi}{2}$.

** $\operatorname{sen} y>0$, puesto que $0<y<\pi$.

5°. $(\operatorname{arc\,cotg} x)'_x = \frac{1}{(\operatorname{cotg} y)'_y} = \operatorname{sen}^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 y}$,

o sea

$$\boxed{(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}} \qquad \text{(XXIVa)}$$

6°. Si $u = \varphi(x)$, se tiene:

$$\boxed{(\operatorname{arc\,sen} u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'} \qquad \text{(XXI)}$$

$$\boxed{(\operatorname{arc\,cos} u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'} \qquad \text{(XXII)}$$

$$\boxed{(\operatorname{arc\,tg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'} \qquad \text{(XXIII)}$$

$$\boxed{(\operatorname{arc\,cotg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'} \qquad \text{(XXIV)}$$

7°. Ejemplos. 1. Hállese la derivada de la función: $y = \operatorname{arc\,sen} ax$.

Solución. Según la fórmula (XXI):

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(ax)^2}} \cdot (ax)' \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}} .$$

2. *Hállese la derivada de la función:* $y = \operatorname{arc\,tg}(2x^2-7)$.

Solución. Según la fórmula (XXIII):

$$y' = \frac{1}{1+(2x^2-7)^2} \cdot (2x^2-7)' = \frac{4x}{1+4x^4-28x^2+49} =$$

$$= \frac{2x}{2x^4-14x^2+25} .$$

§ 94. Derivadas de segundo orden y de órdenes superiores

La derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$ es una función del mismo argumento x. Puede ocurrir que la derivada sea una función derivable, por lo que se puede buscar su derivada.

Ejemplo. Si se considera la función $y = x^4$, la derivada será: $(x^4)' = 4x^3$; y la derivada de la función derivada será: $(4x^3)' = 12x^2$.

La derivada de la función dada se llama derivada primera o derivada de primer orden; la derivada de la primera derivada se llama derivada segunda o derivada de *segundo orden*, y se designa así: y'', $f''(x)$, o así $y^{(2)}$, $f^{(2)}(x)$, o así $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$. La derivada de la segunda derivada se llama derivada tercera o derivada de tercer orden, y se designa así: y''', $f'''(x)$, o así $y^{(3)}$, $f^{(3)}(x)$, o así $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$, etc.

El proceso para hallar las derivadas una tras otra se llama *derivación sucesiva*.

Ejemplos. 1. $y=x^4$; $y'=4x^3$; $y''=12x^2$; $y'''=24x$; $y^{IV}=24$;

$$y^{V}=0.$$

2. $y=\ln x$; $y'=\frac{1}{x}=x^{-1}$; $y''=-1x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$; $y'''=+1\cdot 2\cdot x^{-3}=\frac{1\cdot 2}{x^3}$; $y^{IV}=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$, etc.

§ 95. Sentido mecánico de la segunda derivada

Supongamos que un punto se mueve rectilíneamente y el espacio recorrido por él se determina por la ecuación $s=f(t)$, donde t es el tiempo. La velocidad v (§ 72) en el momento t es la derivada del espacio respecto al tiempo, es decir,

$$v=\frac{ds}{dt}.$$

La velocidad de variación de la velocidad, en el movimiento rectilíneo, en el momento de tiempo t es la aceleración a.

$$a=(v)'=\left(\frac{ds}{dt}\right)'=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

La segunda derivada del espacio recorrido respecto al tiempo es la aceleración del movimiento rectilíneo en el momento dado de tiempo.

Ejemplo. El movimiento rectilíneo de un punto se hace según la ley:

$$s=(t^3-2)\,m.$$

Determinar la aceleración en el momento $t=10$ seg.

Solución. La aceleración $a=\frac{d^2s}{dt^2}$

Derivando la función $s=t^3-2$, se obtiene $\frac{d^2s}{dt^2}=6t$.

Por lo tanto,

$$a=6t=6\cdot 10=60; \quad a=60 \text{ m/seg}^2.$$

2°. Si el movimiento es irregular, entonces la fuerza F que realiza este movimiento no es constante; a cada momento de tiempo t le corresponde un valor determinado de la fuerza aplicada F; por esto la fuerza es una función del tiempo t, $F=f(t)$.

Según la ley de Newton, en cada momento de tiempo la fuerza aplicada F es igual al producto de la masa m por la aceleración a, es decir,

$$F=ma, \text{ o } f(t)=ma.$$

En el movimiento rectilíneo $a=\frac{d^2s}{dt^2}$; por esto

$$f(t)=m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Conociendo la ecuación del movimiento rectilíneo, se puede, mediante la derivación, hallar el valor de la fuerza activa en cada intervalo de tiempo.

E j e m p l o. Determinar la fuerza, bajo la acción de la cual un punto material efectúa oscilaciones rectilíneas según la ley

$$s=A\cdot\text{sen}\,(\omega t+\omega_0).$$

S o l u c i ó n. $f(t)=m\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$, por lo tanto, hallemos la segunda derivada de la función:

$$s=A\cdot\text{sen}\,(\omega t+\omega_0),$$

$$\frac{ds}{dt}=A\cdot\cos\,(\omega t+\omega_0)\cdot\omega,$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-A\cdot\text{sen}\,(\omega t+\omega_0)\cdot\omega^2=-s\cdot\omega^2=-\omega^2 s;$$

$$f(t)=-m\omega^2 s,$$

es decir, las oscilaciones analizadas se efectúan bajo la acción de una fuerza proporcional al desplazamiento s, y dirigida en sentido contrario.

CAPITULO VIII

APLICACION DE LAS DERIVADAS PARA EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES

§ 96. Criterios de la monotonía rigurosa de una función

Consideremos a la función $y = f(x)$ derivable en cada punto del intervalo (o del segmento) en el que se examina.

1°. Criterios de constancia de una función. En el § 77 fue demostrado que si $f(x)$ es constante, entonces en cada punto del segmento su derivada es igual a cero. En los cursos más completos de análisis se demuestra la suficiencia de esta condición: *si en cada punto del segmento la derivada $f'(x)$ es igual a cero, la función $f(x)$ es constante en este segmento.*

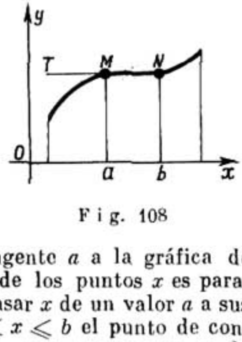


Fig. 108

Esto es geométricamente evidente: si $f'(x) = 0$ en todos los puntos del segmento $[a, b]$, la tangente a a la gráfica de la función $y = f(x)$ en cada uno de los puntos x es paralela al eje Ox (§ 74) (fig. 108). Al pasar x de un valor a a sus valores sucesivos del segmento $a \leqslant x \leqslant b$ el punto de contacto M se desplaza a la derecha, pero permanece en la misma tangente trazada en el punto a, porque la tangente no cambia de su dirección. En consecuencia, el valor de la función, igual a $f(a)$, permanece invariable para todos los puntos del segmento $[a, b]$, y la tangente, en el punto a permanece la gráfica de la función en este segmento.

2°. Criterios de crecimiento y decrecimiento de una función. *La condición* (necesaria y suficiente) *del crecimiento (decricimiento) de una función en un intervalo consiste en que su derivada es positiva (o negativa) en cada punto del intervalo con la posible excepción de puntos aislados, en los cuales la derivada es igual* *a cero* (puntos aislados se entienden en el sentido de que ellos no constituyen ningún intervalo).

D e m o s t r e m o s l a n e c e s i d a d. La función $y = f(x)$ es creciente (fig. 109), (decreciente, fig. 110) en el intervalo $a < x < b$. Entonces en un entorno de cualquier punto x de este intervalo el incremento Δx en el punto x y el

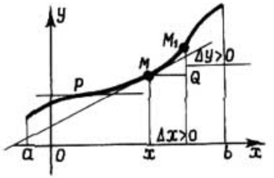


Fig. 109

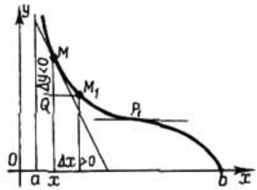


Fig. 110

incremento correspondiente de la función $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ tienen los mismos (opuestos) signos. Por esto la razón

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} > 0$$

y su límite, para $\Delta x \to 0$ $f'(x) \geqslant 0$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} < 0$$

y su límite, para $\Delta x \to 0$ $f'(x) \leqslant 0$.

Los puntos de la función creciente (o decreciente), en los que la derivada $f'(x) = 0$, son puntos aislados en el sentido de que sus abscisas no forman un segmento, porque si fuera $f'(x) = 0$ en el intervalo $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$ $(a < a_1 < b_1 < b)$, la función $f(x)$ tendría un mismo valor en este segmento, es decir, no sería creciente (o decreciente).

La demostración de la suficiencia de la condición ("*si* $f'(x)$ *es positiva* (*negativa*) *en el intervalo* (a, b) *con la posible excepción de puntos aislados, en los cuales* $f'(x) = 0$, *entonces* $f(x)$ *es función creciente* (*decreciente*) *en este intervalo*" y sale de los límites de este curso breve y se puede encontrar en los cursos superiores de análisis.

Supongamos que φ es ángulo formado por la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto x. En el intervalo de crecimiento de $f(x)$

$$f'(x) = \operatorname{tg}\varphi \geqslant 0 \text{ y } 0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2},$$

y en el intervalo de decrecimiento

$$f'(x) = \operatorname{tg}\varphi \leqslant 0 \text{ y } \frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi,$$

es decir, la tangente, trazada a la gráfica de la función en el punto de crecimiento de la función, forma con el eje de abscisas un ángulo agudo o es paralela a este eje (fig. 109), y si está trazada en el punto de decrecimiento de la función, un ángulo obtuso, o es paralela a éste eje (fig. 110). En las figuras 109 y 110 la tangente es paralela al eje Ox en los puntos P y P_1.

3°. E j e m p l o. Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - x^2 - 8x + 2$.

S o l u c i ó n. Para aplicar los criterios de crecimiento y decrecimiento de la función hallaremos la derivada de la función dada y determinaremos los valores de x para los cuales es positiva o negativa:

$$y' = 3x^2 - 2x - 8.$$

Descomponemos el trinomio de segundo grado en factores, ya que es mucho más fácil determinar el signo del producto por los signos de los factores que el signo de la suma por los signos de los sumandos.

Las raíces del trinomio son:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{3} = \frac{1 \pm 5}{3}; \quad \text{o sea,} \quad x_1 = -\frac{4}{3}, \quad x_2 = 2,$$

y por lo tanto:

$$y' = 3 \cdot \left(x + \frac{4}{3}\right) \cdot (x - 2).$$

El factor $x + \frac{4}{3}$ es negativo si $x < -\frac{4}{3}$ y positivo si $x > -\frac{4}{3}$. El factor $x - 2$ es negativo si $x < 2$ y positivo si $x > 2$. El signo del producto dependerá de la posición del punto x en el eje Ox respecto *a los puntos* $-\frac{4}{3}$ *y* 2. *Los puntos* $-\frac{4}{3}$ *y* 2 *dividen todo el eje en* tres intervalos:

$$1)\ -\infty < x < -\frac{4}{3}, \quad 2)\ -\frac{4}{3} < x < 2, \quad 3)\ 2 < x < +\infty.$$

Para determinar el signo de la derivada en cada uno de los intervalos formamos la siguiente tabla:

Número del intervalo	Carácter del intervalo	Signo de $x+\frac{4}{3}$	Signo de $x-2$	Signo de $f'(x)$	La función dada
1	$-\infty < x < -\frac{4}{3}$	$-$	$-$	$+$	crece
2	$-\frac{4}{3} < x < 2$	$+$	$-$	$-$	decrece
3	$2 < x < +\infty$	$+$	$+$	$+$	crece

Por lo tanto, la función dada crece en los intervalos $-\infty < x < -\frac{4}{3}$ y $2 < x < +\infty$ y decrece en el intervalo $-\frac{4}{3} < x < 2$.

La gráfica de la función dada está representada en la figura 111.

4°. La función $y = x^3$ (fig. 69) tiene la derivada $y = 3x^2$, que es positiva para cualquier valor de x distinto de cero. Si $x = 0$, la derivada $y' = 0$. La función $y = x^3$ crece en el intervalo $-\infty < x < +\infty$; $x = 0$, siendo el único punto separado en el que la derivada es igual a cero; en dicho punto crece la función. En efecto, si $x = 0$, $x^3 = 0$; si $x < 0$, $x^3 < 0$, y si $x > 0$, $x^3 > 0$.

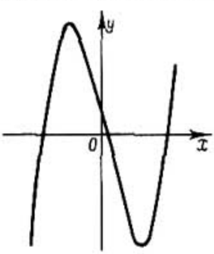


Fig. 111

§ 97. Problemas de determinación de los valores máximos y mínimos absolutos

1°. Se necesita cercar con una alambrada de 60 metros una parcela contigua a la pared de una casa (fig. 112). ¿De qué longitud y anchura debe ser la parcela para que el área sea la máxima?

S o l u c i ó n. Supongamos que la anchura de la parcela es x metros, y el área, y metros cuadrados:

$$y = (60 - 2x) \cdot x = 60x - 2x^2.$$

Los valores de x e y no pueden ser negativos, por eso, el factor $60 - 2x > 0$, y $0 < x < 30$.

El área y es función de x. Determinamos los intervalos de su crecimiento y decrecimiento. Hallamos la derivada:

$$y' = 60 - 4x.$$

De aquí vemos que $y' > 0$ para $x < 15$, y en este caso crece la función; por otra parte, $y' < 0$ para $x > 15$, y en este caso decrece la función.

He aquí una tabla de la función para ciertos valores de x:

Si la anchura $x=$	0	5	10	15	20	25	30
el área $y=$	0	250	400	450	400	250	0

La curva (fig. 113) se eleva desde el origen 0 hasta el punto M ($x = 15$), y después comienza a descender. La función tiene el valor máximo en el punto $x = 15$.

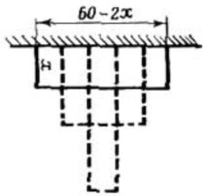


Fig. 112

Por lo tanto, la parcela tendrá el área máxima si su anchura es $x = 15$ metros, y su longitud $60 - 2x = 60 - 30 = 30$ metros.

2°. ¿Cuáles tienen que ser las medidas de una habitación rectangular de 36 metros cuadrados para que su perímetro sea el menor?

Solución. Supongamos que la longitud es igual a x metros; la anchura del rectángulo será $\frac{36}{x}$ metros, y el perímetro:

$$y = 2\left(x + \frac{36}{x}\right) = 2x + \frac{72}{x}.$$

El perímetro y es función de la longitud x, definida para *todos los valores positivos de* x:

$$0 < x < +\infty.$$

Determinemos los intervalos de su crecimiento y decrecimiento:

$$y' = 2 - \frac{72}{x^2} = \frac{2(x^2 - 36)}{x^2} = \frac{2(x-6)(x+6)}{x^2}.$$

El signo de la derivada se determina por medio del signo de la diferencia $x - 6$. En el intervalo $0 < x < 6$ $y'(< 0$,

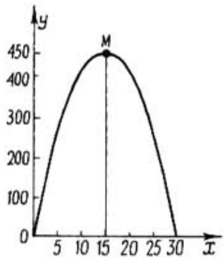


Fig. 113

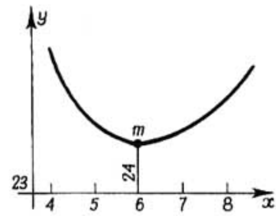


Fig. 114

y en el intervalo $6 < x < +\infty$ $y' > 0$. El perímetro decrece en el intervalo $0 < x < 6$ y crece en el intervalo $6 < x < +\infty$. La gráfica (fig. 114) se construye con ayuda de la siguiente tabla:

Si $x =$	$\to 0$	3	4	5	6	7	8	$\to \infty$
$y =$	$\to \infty$	30	26	24,4	24	24,3	25	$\to \infty$

Por lo tanto, el perímetro del rectángulo tiene su valor mínimo si su longitud es de 6 metros, y su anchura de $\frac{36}{6} = 6$ metros, es decir, si es un cuadrado.

§ 98. Máximos y mínimos de la función

Los problemas cuya finalidad es hallar los valores máximos y mínimos de las magnitudes tienen gran aplicación en la técnica y se reducen, como se ve en los ejemplos, a hallar un máximo y un mínimo de la función.

D e f i n i c i o n e s. 1. *El valor de la función $f(x)$, si $x = c$, se llama un máximo de ésta en el punto c, si él es mayor que su valor $f(x)$ en cualquier punto x, tomado en un entorno del punto $x = c$.*

2°. *El valor de la función $f(x)$, si $x = c$, se llama un mínimo de ésta en el punto c, si él es menor que su valor en cualquier punto x, tomado en un entorno del punto $x = c$.*

A los términos "máximo" y "mínimo" se les da la denominación común de "extremos".

Al valor del argumento en el que la función alcanza el máximo (o el mínimo) lo llamaremos *punto de máximo* (*de mínimo*) *o punto de extremo*.

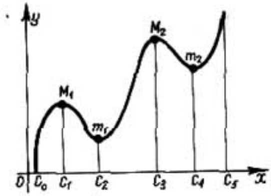


Fig. 115

La función puede tener solamente un máximo, por ejemplo, la función $y = 60x - 2x^2$ (fig. 113), o solamente un mínimo, por ejemplo, la función $y = 2x + \frac{72}{x}$ (fig. 114), o tener un máximo y un mínimo, como por ejemplo, la función $y = x^3 - x^2 - 8x + 2$ (fig. 111). La función puede tener unos cuantos máximos y mínimos (fig. 115), alternándose en este caso los máximos y los mínimos. La función puede no tener ni máximos ni mínimos. Por ejemplo, las funciones $y = x^3$, $y = \operatorname{cotg} x$, $y = a^x$ no tienen ni máximo ni mínimo porque al crecer x desde $-\infty$ hasta $+\infty$, la primera y tercera funciones crecen, y la segunda decrece.

El máximo (mínimo) de una función puede no ser el valor máximo (mínimo) absoluto de ésta. Así, la función de la figura 115 alcanza en el punto c_5 mayor valor que los máximos c_1M_1 y c_3M_2, y en el punto c_0 menor valor que los mínimos c_2m_1 y c_4m_2, y el mínimo c_4m_2 es mayor que el máximo c_1M_1. *El máximo (mínimo) de una función en el punto dado es el mayor (menor) valor de la función solamente respecto a sus valores en los puntos situados a la izquierda y a la derecha en una proximidad suficientemente estrecha del punto extremo.*

§ 99. Criterios de existencia de extremos

1°. Condición necesaria. *En el punto de extremo de la función derivable su primera derivada es igual a cero.*

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que $x = c$ es un máximo de la función $f(x)$ en un δ-entorno del punto $x = c$ (fig. 116). Representemos los valores del argumento x del semientorno a la izquierda del punto c en la forma $c - \Delta x$, y a la derecha en la forma $c + \Delta x$, siendo $0 < \Delta x < \delta$. El valor de la función $f(x)$ en el punto c es $f(c)$, en el semientorno a la izquierda es $f(c - \Delta x)$, y a la derecha, $f(c + \Delta x)$.

Según la definición de máximo de una función:

$$f(c-\Delta x) < f(c) \text{ y } f(c+\Delta x) < f(c),$$

por lo tanto:

$$f(c-\Delta x) - f(c) < 0 \text{ y } f(c+\Delta x) - f(c) < 0.$$

Los primeros miembros de las desigualdades expresan el incremento de la función en el punto $x = c$ al variar el argumento respectivamente en $-\Delta x$ y $+\Delta x$. Al formar la razón del incremento de la función respecto al incremento del argumento, se tiene:

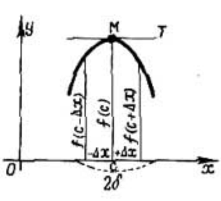


Fig. 116

$$\frac{f(c-\Delta x) - f(c)}{-\Delta x} > 0 \quad (1);$$

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{+\Delta x} < 0. \qquad (2)$$

Ambas razones (1) y (2) tienen un mismo límite para $\Delta x \to 0$, porque según la condición, la función $f(x)$ tiene derivada en el punto c:

$$\lim_{-\Delta x \to 0} \frac{f(c-\Delta x) - f(c)}{-\Delta x} = f'(c) \quad \text{y} \quad \lim_{+\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{+\Delta x} = f'(c).$$

De la desigualdad (1) se deduce (§ 56) que $f'(c)$ es positiva o es igual a cero, y la desigualdad (2) indica que $f'(c)$ no puede ser positiva. Por lo tanto,

$$f'(c) = 0,$$

que era lo que se trataba de demostrar.

2°. Teorema (criterio suficiente). *Si en un entorno de amplitud 2δ del punto $x = c$: la función $f(x)$ es continua, su derivada, $f'(x)$, a la izquierda del punto $x = c$ es positiva, y a la derecha, negativa, el valor $x = c$ es punto de máximo de la función.*

D e m o s t r a c i ó n. La función dada es continua en el δ-entorno del punto c, por eso los números $f(c)$, $f(c-\Delta x)$ y $f(c+\Delta x)$, si $0<\Delta x<\delta$ existen y

$$\lim_{-\Delta x\to 0} f(c-\Delta x)=\lim_{-\Delta x\to 0} f(c+\Delta x)=f(c).$$

La función dada $f(x)$ en el semientorno a la izquierda de punto c es creciente porque su derivada a la izquierda del punto c es positiva, y en el semientorno a la derecha es decreciente, ya que su derivada a la derecha del punto c es negativa (fig. 116), y por eso, sus valores

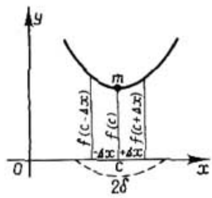
$$f(c-\Delta x) \text{ y } f(c+\Delta x)$$

crecen al tender Δx a cero*. De tal manera que para cada valor $\Delta x\neq 0$:

$$f(c-\Delta x)<f(c) \text{ y } f(c+\Delta x)<f(c).$$

Pero en este caso, $f(c)$ es máximo de la función $f(x)$.

3°. Del mismo modo se puede demostrar que *si en el entorno del punto $x=c$, la función $f(x)$ es continua, y la derivada $f'(x)$ a la izquierda del punto $x=c$ es negativa, y a la derecha es positiva, el valor $x=c$ es punto de mínimo de la función* (fig. 117).



F i g. 117

4°. Tanto en el punto de máximo como en el punto de mínimo, la derivada es igual a cero (1°). Lo recíproco es falso. *Una función puede no tener ni máximo ni mínimo en el punto en el que la derivada es igual a cero.*

Por ejemplo, la función $y=x^3$ tiene derivada igual a cero en el punto $x=0$ (§ 96, 4°). Sin embargo, en el punto $x=0$ no existe ni máximo ni mínimo, y la función crece, cualesquiera que sean los valores de x, incluso si $x=0$.

De aquí que *la función $f(x)$ no tiene en el punto $x=c$ ni máximo ni mínimo si su derivada es igual a cero en este punto y tiene idéntico signo a la izquierda y a la derecha de él.*

---

* Según la definición de la función decreciente (§ 64,7°), a valor *menor* del argumento corresponde un valor *mayor* de la función, es decir, si $x_1>x_2$, será $f(x_1)<f(x_2)$.

5°. D e f i n i c i ó n. *Los valores del argumento x, para los cuales la derivada $f'(x)$ es igual a cero, se llaman puntos estacionarios.*

La tangente en los puntos estacionarios es paralela al eje Ox.

§ 100. Regla para hallar el extremo

1°. *Para hallar el extremo de una función es necesario:*

1) *hallar su derivada;*

2) *igualar la derivada a cero y resolver la ecuación obtenida; de las raíces que resultan se eligen las reales; si todas las raíces resultan imaginarias, la función no tiene extremo;*

3) *determinar el signo de la derivada en los intervalos del campo de determinación de la función limitados por las raíces reales; si la derivada es positiva en un intervalo situado a la izquierda del punto estacionario dado, y es negativa en un intervalo situado a la derecha de dicho punto, el punto dado es punto de máximo de la función; si la derivada es negativa a la izquierda y positiva a la derecha del punto estacionario dado, este punto es punto de mínimo de la función; si la derivada tiene un mismo signo, tanto a la izquierda como a la derecha del punto estacionario, en este punto la función no tiene ni máximo ni mínimo;*

4) *sustituyendo el argumento en la expresión dada de la función por el valor que da el máximo o el mínimo de la función, se obtiene el correspondiente valor máximo o mínimo de la función.*

Si la función tiene puntos de discontinuidad, éstos deben ser incluidos en el número de puntos estacionarios que parten a Ox en intervalos, en los cuales se determina el signo de la derivada.

§ 101. Ejemplos de cálculo de extremo

1°. Para hallar el máximo y el mínimo de la función

$$y = 2 + 3x^2 - x^3,$$

1) hallamos la derivada:

$$y' = 6x - 3x^2,$$

2) igualamos la derivada a cero y resolvemos la ecuación obtenida:

$$6x - 3x^2 = 0; \qquad 3x(2 - x) = 0; \qquad x_1 = 0, \ x_2 = 2;$$

Los puntos 0 y 2 dividen el eje Ox en tres intervalos:

$$1)\ -\infty < x < 0,\quad 2)\ 0 < x < 2 \text{ y } 3)\ 2 < x < +\infty;$$

3) descomponemos $6x - 3x^2$ en factores:

$$y' = -3x(x-2),$$

y determinamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos:

N del intervalo	Carácter del intervalo	Signo de $-3x$	Signo de $x-2$	Signo de y'
1	$-\infty < x < 0$	+	−	−
2	$0 < x < 2$	−	−	+
3	$2 < x < +\infty$	−	+	−

La derivada es negativa en el intervalo situado a la izquierda del punto $x = 0$, y positiva en el intervalo situado a su derecha, por so, $x = 0$ es punto de mínimo de la función.

La derivada es positiva a la izquierda, y negativa a la derecha del punto $x = 2$, por eso, $x = 2$ es punto de máximo de la función;

4) en la ecuación dada $y = 2 + 3x^2 - x^3$ sustituimos x por los valores obtenidos 0 y 2, resultando:

$$y_{\text{mín}} = 2,\quad y_{\text{máx}} = 6.$$

2°. Hállense los puntos de máximo y de mínimo de la función:

$$y = \frac{3x^2 + 5x + 25}{x+2}.$$

Solución. La función dada no tiene valor numérico si $x = -2$, y el valor -2 es punto de discontinuidad. Teniendo esto en cuenta,

1) hallamos la derivada:

$$y' = \frac{3(x^2 + 4x - 5)}{(x+2)^2};$$

2) igualamos la derivada a cero. Pero un quebrado es igual a cero si el numerador es cero,

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación, se tiene:

$$x_1 = -5;\quad x_2 = +1\,*.$$

* Puede ocurrir que el numerador del quebrado sea un número constante. Este caso se examina más adelante, en el § 104.

Incluimos el punto de discontinuidad $x = -2$ en el número de puntos que dividen a Ox en intervalos, en los cuales es necesario determinar el signo de la derivada;

3) el signo de la derivada en cualquier punto x, excluyendo los puntos de discontinuidad, se determina por el signo de $x^2 + 4x - 5$, ya que el coeficiente 3 del numerador de la derivada y el del denominador de la misma $(x+2)^2$ son positivos. Para mayor comodidad descomponemos el numerador en factores:

$$x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1),$$

N del intervalo	Carácter del intervalo	Signo de $x+5$	Signo de $x-1$	Signo de y'
1	$-\infty < x < -5$	$-$	$-$	$+$
2	$-5 < x < -2$	$+$	$-$	$-$
3	$-2 < x < +1$	$+$	$-$	$-$
4	$+1 < x < +\infty$	$+$	$+$	$+$

En el punto $x = -5$, la función tiene máximo, y en el punto $x = 1$, tiene mínimo.

3°. Hállese el máximo y el mínimo de la función:

$$y = \cos x \cdot \operatorname{sen}^3 x.$$

Solución: 1) $y' = -\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^3 x + 3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x \cdot \cos x,$

o

$$y' = 3 \operatorname{sen}^4 x \left(\operatorname{cotg}^2 x - \frac{1}{3}\right)$$

o

$$y' = 3 \operatorname{sen}^4 x \left(\operatorname{cotg} x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \qquad (1)$$

2) igualando a cero cada factor por separado, se tiene:

$$\operatorname{sen}^4 x = 0; \qquad \operatorname{sen} x = 0; \qquad x = 0;$$

$$\operatorname{cotg} x + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0; \qquad \operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad x = -\frac{\pi}{3};$$

$$\operatorname{cotg} x - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0; \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad x = \frac{\pi}{3}.$$

Debe señalarse que al resolver ecuaciones trigonométricas se toman solamente los valores principales de los argumentos.

N del intervalo	Carácter del intervalo	Signo de $\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sqrt{3}}$	Signo de $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sqrt{3}}$	Signo de y'
1	$-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3}$	+	−	−
2	$-\frac{\pi}{3} < x < 0$	−	−	+
3	$0 < x < \frac{\pi}{3}$	+	+	+
4	$\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$	+	−	−

Por lo tanto, la función tiene mínimo en el punto $x = -\frac{\pi}{3}$, no tiene ni máximo ni mínimo en el punto $x = 0$; y tiene máximo en el punto $x = \frac{\pi}{3}$

§ 102. Determinación de extremos mediante la segunda derivada

1°. Teorema. *Si en el punto $x = c$, la derivada primera de la función $f(x)$ es igual a cero, $f'(c) = 0$ y la derivada segunda es positiva, $f''(c) > 0$, la función $f(x)$ tiene mínimo en el punto $x = c$;*

si la segunda derivada es negtiva, $f''(c) < 0$, la función $f(x)$ tiene máximo en el punto $x = c$.

Demostración. Supongamos que $f'(x) = 0$ y $f''(x) > 0$ *en el punto* $x = c$. *Tomemos el caso en que* $f''(x) > 0$ no sólo en el mismo punto $x = c$, sino también en un cierto entorno de él,* entonces en este entorno la primera derivada $f'(x)$ es continua y crece, y ya que si $x = c$, $f'(x) = 0$; entonces si $x < c$, $f'(x) < 0$; y si $x > c$, $f'(x) > 0$. Esto significa que en el punto $x = c$ la función dada $f(x)$ tiene un mínimo.

Del mismo modo se demuestra el teorema para el caso de que $f''(c) < 0$.

2°. El teorema demostrado determina el segundo procedimiento de determinación de extremo. Se diferencia del

* Esto tiene lugar siempre que $f''(x)$ es una función continua en el punto $x = c$.

primero (§ 100) en que la tercera operación del primer procedimiento es sustituida: a) por la determinación de la segunda derivada y su signo en los puntos estacionarios. El resultado de la investigación se puede expresar así:

Si el signo del número $f''(c)$ es	en el punto $x=c$ $f(x)$ tiene
positivo	mínimo
negativo	máximo

Si $f''(c)=0$, es necesario realizar la investigación de la función por medio del primer procedimiento.

3°. E j e m p l o. 1. Hállense por medio del segundo procedimiento los máximos y los mínimos de la función:

$$y=5-x^2-x^3-\frac{1}{4}x^4.$$

S o l u c i ó n. 1. Hallamos la primera derivada:

$$y'=-2x-3x^2-x^3.$$

2. Igualamos la primera derivada a cero y resolvemos la ecuación obtenida:

$$-2x-3x^2-x^3=0, \text{ o } x(x^2+3x+2)=0,$$

de donde

$$x=0 \text{ o } x^2+3x+2=0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2+3x+2=0$, se tiene:

$$x=\frac{-3\pm 1}{2}.$$

Existen tres puntos estacionarios:

$$x_1=-2,\ x_2=-1 \text{ y } x_3=0.$$

3. Hallamos la segunda derivada:

$$y''=-2-6x-3x^2.$$

4. Determinamos el signo de la segunda derivada sustituyendo x por su valor, al principio en el primer punto estacionario, luego en el segundo, y después en el tercer punto:

si $x=-2$ $y''=-2-6\cdot(-2)-3\cdot(-2)^2=-2$,
si $x=-1$ $y''=-2-6\cdot(-1)-3\cdot(-1)^2=+1$,
si $x=0$ $y''=-2$.

Por lo tanto, la función dada tiene mínimo si $x = -1$, y máximo, si $x = -2$ y también si $x = 0$.

Ejemplo 2. Hállense los máximos y mínimos de la función: $y = x^4$.

Solución:

$$1)\ y' = 4x^3;$$
$$2)\ 4x^3 = 0;\ x = 0;$$
$$3)\ y'' = 12x^2;$$
$$\text{si } x = 0\ y'' = 0.$$

Como la segunda derivada es igual a cero, la investigación se realiza mediante el primer procedimiento: si $x < 0$, $y' = 4x^3 < < 0$, y si $x > 0$, $y' = 4x^3 > 0$. Por lo tanto, la función $y = x^4$ tiene mínimo en el punto $x = 0$.

4°. El extremo de la función cuadrática $y = Ax^2 + Bx + C$. Igualando a cero la primera derivada $y' = 2Ax + B = 0$, se obtiene

$$x = \frac{B}{2A}.$$

La segunda derivada $y'' = 2A$ es negativa si $A < 0$ y positiva si $A > 0$. Por consiguiente, la función cuadrática tiene, en el punto $x = -\frac{B}{2A}$, el máximo para $A < 0$, y un mínimo para $A > 0$.

El punto $x = -\frac{B}{2A}$ es el vértice de la parábola $y = = Ax^2 + Bx + C$.

§ 103. Ejemplos de problemas de cálculo de máximos y mínimos

1°. La diferencia de dos números es a. ¿Cuáles serán esos números para que su producto resulte el menor?

Solución. Designemos el número menor con la letra x; el mayor será $x + a$, y el producto de ambos, $x(x + a)$, que es función de x, lo designamos con la letra y, $y = x^2 + ax$.

Hallamos el valor de x en el cual y alcanza el mínimo:

1) $y' = 2x + a$; 2) $2x + a = 0$; $x = -\frac{a}{2}$; 3) $y'' = 2$; 4) la función alcanza el mínimo cuando $x = -\frac{a}{2}$.

El producto de dos números, cuya diferencia es igual a a, es el menor cuando un factor es $-\frac{a}{2}$, y el otro, $\frac{a}{2}$.

2°. La resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de su anchura por el cuadrado de la altura. De un rollizo de diámetro d cm es necesario hacer una viga que tenga la resistencia máxima. ¿Qué dimensiones se deben dar en este caso a la viga?

S o l u c i ó n. Designemos el coeficiente de proporcionalidad por medio de la letra k (que depende de la calidad del material), y la resistencia de la viga por medio de la letra y. Según la condición del problema

$$y = k \cdot b \cdot h^2,$$

donde b (fig. 118) es la base, y h, la altura del rectángulo.

En la ecuación figuran dos variables b y h; expresamos h por medio de b. En el triángulo ABC, en el que $AB = d$, $AC = b$ y $BC = h$, se tiene: $h^2 = d^2 - b^2$. Por lo tanto $y = k \cdot b\,(d^2 - b^2)$, o sea, $y = d^2kb - kb^3$.

Hallamos el máximo de esta función mediante el segundo procedimiento:

1) hallamos la derivada respecto a la variable b:

$$\frac{dy}{db} = d^2k - 3kb^2;$$

2) $d^2k - 3kb^2 = 0;\quad b = \frac{d}{\sqrt{3}};\quad$ 3) $\frac{d^2y}{db^2} = -6kb;$

4) si $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ $y'' = -\frac{6kd}{\sqrt{3}} < 0$ (puesto que $k > 0$ y $d > 0$), la función tiene máximo.

Así, la resistencia de una viga alcanza su máximo si su anchura $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Determinemos la altura:

$$h^2 = d^2 - b^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2d^2}{3},$$

y por lo tanto $h = \frac{d}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$.

Como $\frac{d}{\sqrt{3}} = b$, tenemos $h = b\sqrt{2}$.

Hemos hecho una importante deducción práctica: la resistencia de una viga de sección rectangular llega al máximo si su altura es igual a la base multiplicada por $\sqrt{2}$. Esta relación no depende de la calidad del material, puesto que carece del coeficiente k. Como $\sqrt{2} \approx 1{,}4 = \frac{7}{5}$, la proporción de los lados del rectángulo es aproximadamente $\frac{7}{5}$.

He aquí el procedimiento de construcción de un rectángulo de mayor resistencia.

Si dividimos el diámetro AB (fig. 118) en tres partes iguales por medio de los puntos D y E, levantamos desde estos puntos las perpendiculares DC y EF a AB y unimos los puntos C y F de intersección de estas perpendiculares con la circunferencia con los extremos del diámetro A y B, se obtiene el rectángulo $ACBF$ de mayor resistencia.

En efecto, el cateto AC es la media proporcional entre la hipotenusa AB y el segmento AD:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}\,;\quad AC=\sqrt{AB\cdot AD}=\sqrt{d\cdot\frac{d}{3}}=\frac{d}{\sqrt{3}}\,.$$

Asimismo

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{BD}\,;\quad BC=\sqrt{AB\cdot BD}=\sqrt{d\cdot\frac{2}{3}\,d}=\frac{d}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}.$$

Por lo tanto, $BC=AC\cdot\sqrt{2}$.

3°. Se necesita construir una vasija cilíndrica de aluminio (sin tapadera), cuyo volumen sea v. ¿Qué dimensiones debe tener esa vasija para que se gaste en ella la menor cantidad de material?

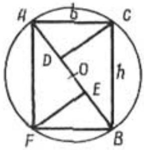


Fig. 118

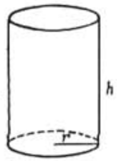


Fig. 119

Solución. La cantidad de aluminio necesario para construir el cilindro se determina por la superficie del cilindro. Por lo tanto, el problema se reduce a hallar dimensiones tales del cilindro que el área total sea la menor. Designemos el radio de la base del cilindro con la letra r, y la altura con la letra h (fig. 119). Aquí hay dos variables: r y h. Expresemos h por medio de r.

El volumen del cilindro $v=\pi r^2 h$, de donde $h=\frac{v}{\pi r^2}$. Designemos con y el área total de la vasija, que está formada por el área de la base, πr^2, y el área lateral $2\pi rh=2\pi r\cdot\frac{v}{\pi r^2}=\frac{2v}{r}$.

Luego: $y=\pi r^2+\frac{2v}{r}$.

Hallemos el mínimo de esta función teniendo en cuenta que π y v son constantes, y que r figura como variable independiente.

1) $\frac{dy}{dr}=2\pi r-\frac{2v}{r^2}=\frac{2(\pi r^3-v)}{r^2}$;

2) tras igualar el numerador de la derivada a cero y resolver la ecuación obtenida, resulta: $r=\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$;

3) se toma la derivada de $\frac{dy}{dr}=2\pi r-\frac{2v}{r^2}$

$$\frac{d^2y}{dr^2}=2\pi+\frac{4v}{r^3};$$

$$4) \text{ si } r=\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}\ \frac{d^2y}{dr^2}=2\pi+\frac{4v}{\frac{v}{\pi}}=6\pi>0.$$

Por lo tanto, si $r=\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$, la función alcanza el mínimo.

Determinemos h con objeto de establecer la relación entre r y h.

$$h=\frac{v}{\pi r^2}=\frac{v}{\pi}\cdot\frac{1}{r^2}=\frac{v}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{v^2}{\pi^2}}}=\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}},$$

es decir, $r=h$.

Así pues, para construir una vasija cilíndrica sin tapadera se emplea la menor cantidad de material si su altura es igual al radio de la base.

§ 104. El máximo y el mínimo de la función en los puntos en que no existen valores de la derivada

1°. La función $y=|x|$ (fig. 120) en el punto $x=0$ es continua y tiene mínimo. Sin embargo, en este punto no tiene derivada (§ 75). En cualquier punto, situado a la izquierda o a la derecha de $x=0$,

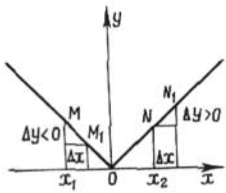


Fig. 120

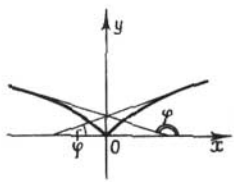


Fig. 121

la función dada tiene derivada. Hallémosla por medio de la regla general (§ 73), como $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Para el punto $x_1 \Delta x>0$, $\Delta y<0$ *y* $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$. *Para el punto* x_2, $\Delta x>0$, $\Delta y>0$ y $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+1$.

Por lo tanto, para la función $y = |x|$ se cumple en el punto $x = 0$ la condición suficiente de existencia del mínimo.

Por lo tanto, *la función puede tener extremo en el punto en el que no existe su derivada, pero en este caso es necesario que se cumpla la condición suficiente de existencia del extremo* (§ 90, 2° y 3°).

2°. La función $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (fig. 121) es continua y tiene mínimo en el punto $x = 0$. Sin embargo, la derivada

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

no se convierte en cero para ningún valor de x. En tal caso es necesario *estudiar también las raíces reales de la ecuación*

$$\frac{1}{f'(x)} = 0.$$

En el caso dado

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x = 0}$$

tiene la raíz $x = 0$. Para $x < 0$ es $f'(x) < 0$, y $x > 0$, $f'(x) > 0$. Esto significa que el punto $x = 0$ es un mínimo.

§ 105. Valores máximo y mínimo de la función en un segmento

1°. Una función $f(x)$ continua en el intervalo (a, b) puede no tener valores máximo y mínimo. Por ejemplo, la función $y = \frac{1}{x}$ es continua en el intervalo $0 < x < \infty$ y en todo punto de este intervalo tiene un valor determinado, pero entre ellos no hay valores que sean máximo y mínimo. En los cursos superiores de análisis se demuestra que *si la función es continua en un intervalo, entre sus valores, alcanzados en este segmento, existen el máximo y el mínimo.*

2°. Supongamos que la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ *. Sus valores máximo y mínimo pueden situarse tanto en los extremos del segmento $[a, b]$ como en los puntos del intervalo (a, b). En el último caso ellos son extremos de la función.

Por ejemplo, la función (fig. 122) tiene el valor máximo en el extremo a del segmento $[a, b]$ y su mínimo en el punto c del intervalo (a, b), $a < c < b$. La función, cuya gráfica está representada en la figura 123, tiene sus valores máximo

* Se supone que $f(x)$ es derivable en los puntos del segmento $[a, b]$ con la posible excepción de algunos puntos aislados, en los cuales la derivada $f'(x)$ no existe.

y mínimo en los puntos c_1 y c_2, situados en el interior del segmento $[a, b]$, es decir, $a < c_1 < b$ y $a < c_2 < b$.

Para hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$ es necesario:

1) *calcular sus valores en los extremos del segmento, o sea, determinar $f(a)$ y $f(b)$;*

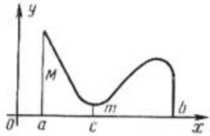


Fig. 122

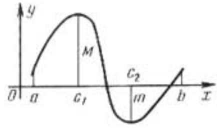


Fig. 123

2) *hallar los puntos de los extremos de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b) y calcular los valores de la función $f(x)$ en estos puntos.* Designemos estos valores por $extf(x)$.

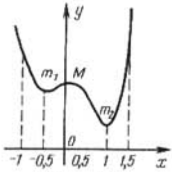


Fig. 124

El mayor de los números $f(a)$, $f(b)$ y $extf(x)$, es el valor máximo de la función en el segmento $[a, b]$, y el menor de ellos es el valor mínimo de esta función.

3°. Ejemplo. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $y = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 3$ en el segmento $[-1; 1]$.

Solución. Hallemos los valores de la función en los extremos del segmento:

$$f(-1) = 3 + 2 - 3 + 3 = 5, \quad f(1) = 3 - 2 - 3 + 3 = 1.$$

Hallemos los puntos de extremo en el intervalo $(-1; 1)$:

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 6x = 6x(2x^2 - x - 1) = 12x\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1).$$

De aquí se obtiene que los puntos estacionarios son: $x = -\frac{1}{2}$; 0; 1.

El tercer punto $(x = 1)$ no lo examinaremos, ya que él no pertenece al intervalo $(-1; 1)$.

Luego se obtiene:

$$f''(x) = 36x^2 - 12x - 6 = 6(6x^2 - 2x - 1);$$

$$f'' = \left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left[6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right] = 9 > 0;$$

$$f''(0) = 6(6 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 1) = -6 < 0.$$

Por lo tanto, $x=-\frac{1}{2}$ es el punto del mínimo; $x=0$, el máximo;

$$\text{mín } f(x)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=3\left(-\frac{1}{2}\right)^4-2\left(-\frac{1}{2}\right)^3-$$
$$-3\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3=2\frac{11}{16};$$
$$\text{máx } f(x)=f(0)=3\cdot 0-2\cdot 0-3\cdot 0+3=3.$$

Así, se tiene:

$$f(-1)=5,\quad f(1)=1,\quad \text{máx } f(x)=3;\quad \text{mín } f(x)=2\frac{11}{16};$$

el valor máximo de la función en el segmento ([-1; 1] es igual a 5; el mínimo es igual a 1.

La gráfica de la función dada está representada en la figura 124.

§ 106. Sentido de la concavidad de una curva

1°. Supongamos que dos puntos M_1 y M_2 tienen una misma abscisa. Si la ordenada del punto M_1 es *mayor* (menor) que la ordenada del punto M_2, se dice que el punto M_1 está situado más *arriba* (abajo) que el punto M_2. También se dice que en el intervalo $a<x<b$ la línea $y=f(x)$ está situada más *arriba* (abajo) que la línea $y=\varphi(x)$, en el caso de que en este intervalo cada punto de la primera línea esté más *arriba* (abajo) que el punto correspondiente a éste de la segunda línea, es decir, si

$$f(x)>\varphi(x)\ \ [\text{o}\ \ f(x)<\varphi(x)].$$

Definición. *En el intervalo $a<x<b$, la curva de la función $y=f(x)$ se llama cóncava hacia arriba (hacia abajo) si está situada más arriba (abajo) de la tangente en cualquier punto del intervalo dado* *.

La curva representada en la figura 125 es cóncava hacia arriba en el intervalo $a<x<b$, y cóncava hacia abajo en el intervalo $b<x<c$.

2°. En cursos superiores de análisis se demuestra que *si la derivada $f'(x)$ es una función creciente (decreciente) en el intervalo $a<x<b$, la curva $y=f(x)$ es cóncava hacia arriba (hacia abajo) en este intervalo.*

* El arco cóncavo hacia arriba se llama a menudo cóncavo y el cóncavo hacia abajo, convexo.

Para aclarar este teorema se marca arbitrariamente una serie de puntos en el eje Ox (fig. 126) y desde cada uno de éstos se traza una recta de tal manera que el coeficiente angular de la recta crezca al crecer las abscisas de los puntos marcados; después, tomando estas rectas como tangentes a cierta curva [$\operatorname{tg} \varphi = f'(x)$], trazamos dicha curva. Se ve cómo la línea está situada solamente encima de cada una de las tangentes trazadas.

3°. Criterio suficiente de concavidad hacia arriba (hacia abajo). *Si en el*

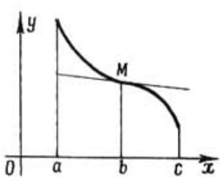


Fig. 125

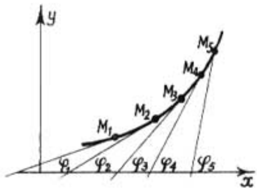


Fig. 126

intervalo $a < x < b$ la derivada segunda $f''(x)$ es positiva (negativa), excepto en algunos puntos, en los cuales es igual a cero, la curva $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba (hacia abajo) en este intervalo.

En efecto, si la derivada segunda $f''(x)$ es, por ejemplo, positiva en el intervalo $a < x < b$, excepto algunos puntos en los que es igual a cero, la derivada primera $f'(x)$ es una función creciente, y la curva $y = f(x)$, según lo precedente, es cóncava hacia arriba.

Si $f''(x) = 0$ no sólo en algunos puntos, sino en un intervalo, entonces $f'(x)$ será una función constante en dicho intervalo, $f(x)$ será una función lineal y su gráfica será una línea recta, por lo que carece de sentido tratar de la concavidad.

§ 107. Puntos de inflexión

1°. Definición. *Si en un entorno del punto $x = c$ la gráfica de una función derivable $y = f(x)$ tiene a la izquierda y a la derecha del punto $x = c$ concavidad de sentido opuesto, el valor $x = c$ se llama punto de inflexión.*

El punto M de la curva (fig. 127), cuya abscisa es $x = c$, se llama también punto de inflexión, y separa el arco de la curva, cóncavo hacia arriba, del arco cóncavo hacia abajo. Solamente puede ser punto de inflexión el punto en el que existe una tangente a la curva. En la vecindad del punto de inflexión la curva está situada a los dos lados de la tangente, encima y debajo de ésta. Debe indicarse que la curva está situada también a los dos lados de la normal. Pero un punto tal como P (fig. 127), en el que no existe una sola tangente, no es punto de inflexión.

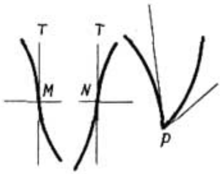


Fig. 127

2°. Como a la izquierda y a la derecha del punto de inflexión $x = c$, la concavidad de la curva $y = f(x)$ tiene diferente sentido, la derivada segunda $f''(x)$ tiene a la izquierda y a la derecha del punto $x = c$ diferentes signos o es igual a cero. Suponiendo la derivada segunda continua en un entorno del punto $x = c$, deducimos que en el punto de inflexión es igual a cero, es decir,

$$f''(c) = 0.$$

3°. De aquí se deduce la regla para hallar los puntos de inflexión:

1) *se halla la derivada segunda de la función dada;*

2) *se iguala a cero y se resuelve la ecuación obtenida *; de las raíces obtenidas se eligen las reales y se ordenan según su magnitud de menor a mayor;*

3) *se determina el signo de la derivada segunda en cada uno de los intervalos limitados por las raíces obtenidas;*

4) *si en dos intervalos limitados por el punto que se examina son diferentes los signos de la derivada segunda, existe punto de inflexión, y si resultan iguales, no existe punto de inflexión.*

4°. Ejemplos. Hállense los puntos de inflexión y determínense los intervalos de la concavidad hacia arriba y hacia abajo de las curvas:

$$1)\ y = \ln x.$$

Solución. Hallamos la segunda derivada:

$$y' = \frac{1}{x}\,;\quad y'' = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Cualquiera que sea el valor de x ($0 < x < +\infty$) y'' es negativa. Esto significa que la función logarítmica no tiene puntos de infle-

* O se hallan los valores de x en los que la derivada pierde el sentido numérico.

xión y la concavidad está dirigida hacia abajo.

2) $y = \operatorname{sen} x$.

Solución. Hallamos la segunda derivada:

$$y' = \cos x; \quad y'' = -\operatorname{sen} x.$$

Suponiendo que $-\operatorname{sen} x = 0$, resulta que $x = k\pi$ k es un número entero. Si $0 < x < \pi$, sen x es positivo e y'' es negativa; si $\pi < x < 2\pi$, sen x es negativo e y'' es positiva, etc. Esto significa que la sinusoide tiene los puntos de inflexión $0, \pi, 2\pi, \ldots$

En el primer intervalo $0 < x < \pi$ la concavidad está dirigida hacia abajo; en el segundo $\pi < x < 2\pi$, hacia arriba, etc.

§ 108. Construcción de las gráficas de funciones

1° . La gráfica de la función se construye a base de su investigación. Para ello es necesario:

1) determinar el campo de existencia de la función;

2) hallar los puntos de discontinuidad y determinar los límites de la función en estos puntos a la derecha y a la izquierda;

3) encontrar los puntos de máximo y de mínimo;

4) determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función;

5) hallar los puntos de inflexión;

6) determinar los intervalos de concavidad hacia arriba o hacia abajo de la curva.

2°. Construir la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

Solución. Efectuamos la investigación de la función.

1. Los valores de y son números reales cualesquiera que sean los valores de x, es decir, el campo de existencia es $-\infty < x < +\infty$.

2. No existen puntos de discontinuidad, porque un polinomio con coeficientes constantes es una función continua.

3. Hallemos el extremo:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x \cdot (x - 2).$$

Los puntos estacionarios son: $x = 0$ y $x = 2$.

Carácter del intervalo	Signo de $3x$	Signo de $x-2$	Signo de y'
$-\infty < x < 0$	$-$	$-$	$+$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$-$
$2 < x < +\infty$	$+$	$+$	$+$

La función tiene máximo si $x = 0$, y mínimo si $x = 2$; $y_{max.} = 4$, $y_{min} = 0$.

4. La función crece en los intervalos: $-\infty < x < 0$ y $2 < x < +\infty$ y decrece en el intervalo $0 < x < 2$.

5. Hallemos los puntos de inflexión. $y'' = 6x - 6$ se anula para $x = 1$. Si $x < 1$, $y'' < 0$, y si $x > 1$, $y'' > 0$. Es decir, a la izquierda y a la derecha del punto $x = 1$, la segunda derivada tiene signos diferentes, por lo tanto, $x = 1$ es un punto de inflexión.

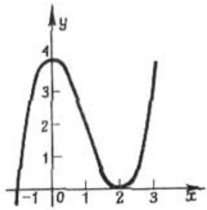


Fig. 128

6. La curva es cóncava hacia abajo en el intervalo $-\infty < x < +1$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $+1 < x < +\infty$.

Al inscribir en una tabla los valores x e y de las coordenadas halladas de los puntos de máximo, de mínimo y de infle: xión, y algunos valores comprendidos entre ellos, resulta:

Si $x=$	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
$y=$	$-6\frac{1}{8}$	0	$3\frac{1}{8}$	4	$3\frac{3}{8}$	2	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{7}{8}$	4

La gráfica de la función está representada en la figura 128.

CAPITULO IX

DIFERENCIAL

§ 109. Comparación de cantidades infinitamente pequeñas

1°. *Formemos una razón con magnitudes infinitamente pequeñas, que se aproximen a cero de acuerdo con diversas leyes.* Por ejemplo, siendo los valores de $\alpha = 10;\ 1;\ 0{,}1;\ 0{,}001$; etc.; y los valores de $\beta = 1000;\ 1;\ 0{,}001;\ 0{,}000001$; etc. La razón $\frac{\beta}{\alpha} = 100;\ 1;\ 0{,}01;\ 0{,}0001$. Así pues, la razón de magnitudes infinitamente pequeñas es una magnitud variable y puede tener un límite finito (igual a cero, como en el ejemplo, o distinto de cero) o infinito; asimismo puede no existir límite.

2°. Definiciones: 1) β se *llama infinitésimo de orden superior a* α *si el límite de la razón* $\frac{\beta}{\alpha}$ *es igual a cero, es decir, si* $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$;

2) β *se llama infinitésimo de orden inferior a* α *si*

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty;$$

3) β *y* α *se llaman infinitésimos del mismo orden si el límite de su razón es un número* k, *diferente de cero, es decir, si*

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = k, \text{ donde } k \neq 0 \text{ y } k \neq \infty;$$

4) β *y* α *se llaman infinitésimos incomparables si no existe límite de su razón.*

5) β y α se llaman infinitésimos equivalentes si

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

3°. Ejemplos. 1. En el ejemplo examinado más arriba, $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, por lo tanto β es un infinitésimo de orden superior a α y $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, por lo que α es un infinitésimo de orden inferior a β.

2. $\alpha = 1 - x$ y $\beta = 1 - x^2$ son infinitésimos para $x \to 1$. La razón $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1-x^2}{1-x} = 1 + x$.

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim_{x \to 1} (1 + x) = 2.$$

Así pues, $1-x$ y $1-x^2$ *son infinitésimos de igual* orden para $x \to 1$.

3. Comparemos $1 - \cos x$ con x, para $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right) =$$

$$= \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{\frac{x}{2} \to 0} \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0 \quad (\S\ 49,\ 3^\circ \text{ y } 86),$$

es decir, $1 - \cos x$, para $x \to 0$, es un infinitésimo de orden superior a x.

§ 110. La diferencial de la función

1°. Según la definicion,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Si $\Delta x \to 0$, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una magnitud variable y como toda variable que tiene límite, difiere de su límite $f'(x)$ en un infinitésimo, por ejemplo, en α:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha.$$

De aquí se deduce que a un incremento arbitrario Δx *en el punto* x *le corresponde el incremento de la función*

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha \Delta x.$$

El producto $f'(x)\,\Delta x$ es la parte principal del incremento de la función y tiene una denominación especial: diferencial de la función. La diferencial de la función $y = f(x)$ se designa por el símbolo dy o $df(x)$.

Definición. *Se llama diferencial de una función al producto de la derivada $f'(x)$ por el incremento arbitrario Δx del argumento*

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot \Delta x.} \tag{1}$$

2°. Para obtener el valor de la diferencial de una función es necesario conocer dos números: el valor inicial del argumento x y su incremento Δx.

Ejemplo. Calcular la diferencial de la función $y = x^2$ al variar el valor del argumento x desde 3 hasta 3,1.

Solución. $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

Hallemos en primer lugar dy para valores arbitrarios de x y Δx. Como

$$f'(x) = (x^2)' = 2x,$$

tenemos

$$dy = 2x \cdot \Delta x.$$

El valor inicial del argumento es $x = 3$, y su incremento $\Delta x = 3{,}1 - 3 = 0{,}1$. Sustituyendo estos valores en la expresión de dy, resulta:

$$dy = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}6.$$

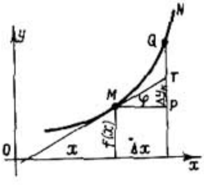


Fig. 129

3°. Sentido geométrico de la diferencial de una función. Fijemos un cierto valor x en el campo de definición de la función $f(x)$, y tracemos por el punto $(x, f(x))$ la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ (fig. 129). Las coordenadas de otro punto cualquiera de esta tangente (por ejemplo, del punto T) las designaremos por $x + \Delta x$ y $f(x) + \Delta y_k$. Con tal notación la ecuación de la tangente (fórmula (II) § 74) se escribe así:

$$[f(x) + \Delta y_k] - f(x) = f'(x)\,[(x + \Delta x) - x],$$

de donde

$$\Delta y_k = f'(x)\,\Delta x.$$

Pero $f'(x)\,\Delta x$ es la diferencial de la función $f(x)$ en el punto x. Por consiguiente,

$$\boxed{dy = \Delta y_k,}$$

o sea, *la diferencial de la función $f(x)$ para un valor dado de x es geométricamente el incremento de la ordenada de la tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto x, que corresponde al incremento Δx.*

4°. La diferencial dy y el incremento Δy no suelen ser iguales entre sí. En la figura 129, $dy = PT$ es menor que $\Delta y = PQ$. Es evidente que dy puede ser mayor que Δy. Ocurrirá esto, por ejemplo, si la curva MN es ascendente y cóncava hacia abajo.

5°. E j e m p l o. Para la función $y = x^2$, al variar x desde 3 hasta 3,1, el incremento $\Delta y = 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 = 2\cdot 3\cdot 0{,}1 + 0{,}1^2 = 0{,}61$. La diferencial $dy = 2x\cdot\Delta x = 2\cdot 3\cdot 0{,}1 = 0{,}6$.

Tomando dy como valor aproximado de Δy, se tiene que: el error absoluto de la aproximación es igual a la diferencia $\Delta y - dy = 0{,}01$, y el error relativo de la aproximación es la razón:

$$\frac{\Delta y - dy}{dy} = \frac{0{,}01}{0{,}60} = \frac{1}{60} = 1{,}7\%.$$

Al variar x desde 3 hasta 3,01 el error relativo de la aproximación es igual a

$$\frac{\Delta y - dy}{dy} = \frac{0{,}0001}{0{,}06} = \frac{1}{600} = 0{,}17\%.$$

6°. *La diferencia entre el incremento y la diferencial de una función $\Delta y - dy$, es un infinitésimo de orden superior al incremento del argumento Δx:*

En efecto,

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x, \ \text{o} \ \Delta y = \Delta y + \alpha\Delta x.$$

De aquí

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \alpha$$

y además en este caso $\alpha \to 0$, si $\Delta x \to 0$; por eso

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\alpha = 0.$$

7°. De lo expuesto se deduce que *la diferencial dy de la función $y = f(x)$ posee dos propiedades:*

1) *dy es proporcional a Δx ($dy = k\Delta x$, siendo $k = y$);*

2) *la razón $\frac{\Delta y - dy}{\Delta x}$ tiende a cero al tender Δx a cero.*

8°. L a s d i m e n s i o n e s d e l a d i f e r e n c i a l d e l a f u n c i ó n. Si $f(x)$ es una función concreta, su diferencial tiene la misma dimensión que la función $f(x)$, pues la diferencial es la parte principal del incremento de la función $f(x)$.

Por ejemplo, si x es tiempo, en segundos; $f(x)$, espacio, en metros, recorrido por un punto en movimiento durante el tiempo x, la diferencial $df(x)$ es un número de metros (m).

La dimensión de la diferencial de una función no coincide con la dimensión de la función derivada. Así, en el ejemplo mostrado la diferencial es $df(x)$ m y la derivada $\frac{df(x)}{dx}$ m/seg.

§ 111. La diferencial del argumento. Forma invariable de la diferencial. La derivada como razón de diferenciales

1°. *Se llama diferencial* (dx) *del argumento* x *a su incremento* Δx:

$$\boxed{dx = \Delta x,} \qquad \text{(II)}$$

ya que el incremento Δx tiene propiedades de la diferencial:

1) Δx es proporcional a Δx, pues $\Delta x = 1 \cdot \Delta x$,

2) la diferencia $\Delta x - \Delta x = 0$ y por eso $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - \Delta x}{\Delta x} = 0$.

2°. Sustituyendo en la fórmula (I) el valor Δx por dx, se tiene:

$$\boxed{dy = f'(x) \cdot dx,} \qquad \text{(III)}$$

o sea, *la diferencial de la función es el producto de su derivada por la diferencial del argumento.*

3°. La fórmula (III) posee una excelente propiedad: *la fórmula* $dy = f'(x)\,dx$ *subsiste también en el caso de que el argumento* x *sea una función de otro argumento.*

En efecto, si x es función de u, $f(x)$ es función compuesta de u, y es preciso calcular dy por medio de la fórmula:

$$dy = f'_u(x) \cdot \Delta u.$$

Pero

$$f'_u(x) = f'_x(x) \cdot x'_u \quad (\S\ 85).$$

Por lo que

$$dy = f'(x) \cdot x'_u \cdot \Delta u.$$

Pero como, según la definición,

$$x_u \cdot \Delta u = dx,$$

se tiene

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Esta propiedad de la fórmula (III) conservar su forma sea x argumento o función otro argumento, se llama *invariancia de la fórmula de la diferencial de una función.* Es precisamente invariante la forma de la diferencial. El contenido del símbolo dx en la fórmula (III) puede ser diferente: si x es el argumento, dx es Δx, el incremento del argumento; *si, en cambio, x es función del argumento u, dx es el producto* $x'_u \cdot \Delta u$, pero no es el incremento Δx, sino sólo su parte principal.

4°. Ejemplo. Hállese la diferencial de la función:

$$y = \sqrt{e^{2x} - 1}.$$

Solución. Según la fórmula (III)

$$dy = y' \cdot dx.$$

Buscamos y':

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{e^{2x} - 1}} \cdot e^{2x} \cdot 2 = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

Por lo tanto,

$$dy = \frac{e^{2x} \cdot dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

5°. De la fórmula (III) se deduce:

$$\boxed{f'(x) = \frac{dy}{dx},}$$

es decir, *la derivada de una función $f(x)$* en el punto x es igual a la razón *de la diferencial de la función respecto a la diferencial del argumento en el punto x.*

§ 112. Aplicación del concepto de diferencial a los cálculos aproximados

1°. La *diferencia $\Delta y - dy$ es un infinitésimo de orden* superior respecto a Δx, por lo tanto, para valores de Δx suficientemente pequeños

$$\boxed{\Delta y \approx dy = f'(x)\,\Delta x} \qquad \text{(IV)}$$

Esto significa que *para pequeñas variaciones del argumento (a partir del valor inicial de x), la magnitud de la variación de la función $y = f(x)$ aproximadamente se puede considerar proporcional a la magnitud de la variación del argumento; el coeficiente de proporcionalidad es igual al valor de la derivada $f'(x)$; la curva $y = f(x)$ en este caso se puede sustituir aproximadamente por la tangente a ésta en el punto x.*

Como $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, sustituyendo en la fórmula (IV) Δy por su expresión, resulta:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x,$$

$$\boxed{f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x} \qquad \text{(V)}$$

2°. Las fórmulas (IV) y (V) dan origen a muchas aplicaciones del concepto de la diferencial. Examinaremos solamente la aplicación de la diferencial en los cálculos aproximados.

En la práctica, la medición ofrece un valor aproximado de la magnitud. Supongamos que x es el valor aproximado del argumento, obtenido al medirlo con un error Δx, y $x + \Delta x$ es su valor real. Entonces x determina el valor *aproximado* de la función $f(x)$, y $x + \Delta x$ determina su valor real $f(x + \Delta x)$.

La magnitud absoluta de la diferencia entre el valor real y el aproximado se llama *error absoluto*. El error absoluto del argumento es igual a $|\Delta x|$, y el error absoluto de la función es

$$|\Delta y| = |f(x+\Delta x) - f(x)|.$$

La magnitud absoluta de la razón del error absoluto respecto al valor de la magnitud se llama *error relativo*. Al determinar el valor de una función, el error relativo es igual a:

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|^{*}.$$

La determinación de los errores en las mediciones es uno de los problemas transcendentales de la técnica. La solución de este problema tiene importancia al realizarse reiteradas mediciones, en las que se cometen a menudo errores que se deben a diversas causas, como sucede,

* Se representa por y el valor aproximado de la función, es decir, $f(x)$, tomado con defecto.

por ejemplo, en las mediciones geodésicas del terreno. Asimismo tiene gran importancia determinar el error en los cálculos, porque el error relativo del resultado de la operación (resta, multiplicación, etc.) se diferencia del error relativo de las magnitudes con que se opera.

Para hallar el error relativo de una función es necesario en primer lugar encontrar $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. El segundo miembro de la ecuación $y = f(x)$ suele ser una expresión matemática complicada, y por eso, para hallar Δy hay que realizar hábiles transformaciones en cada caso particular. Al mismo tiempo, el valor aproximado de Δy (la diferencial de la función dy) puede ser hallado sin gran dificultad por medio de las fórmulas examinadas, cualquiera que sea la forma de la función. Por lo tanto, el incremento Δy se suele sustituir por la diferencial, dy y el error relativo δ se toma igual a $\left|\frac{dy}{y}\right|$, es decir,

$$\delta = \left|\frac{dy}{y}\right|. \qquad \text{(VI)}$$

3°. E j e m p l o s. 1. Mostremos lo fácil que es determinar la diferencia tabular de los logaritmos decimales de los números. La diferencia tabular Δy es el incremento del logaritmo decimal

$$y = \log_{10} x$$

al aumentar el número x en 1 es igual aproximadamente a su incremento lineal dy (fórmula IV):

$$\Delta y \approx dy = (\log_{10} x)' \cdot dx = \frac{dx}{x} \cdot \frac{1}{\ln 10}.$$

Como

$$\frac{1}{\ln 10} = 0{,}43429 \text{ y } dx = \Delta x, \text{ tendremos}$$

$$\Delta y \approx 0{,}43429 \cdot \frac{\Delta x}{x}.$$

Suponiendo que $\Delta x = 1$, $x = N$, hallaremos que la diferencia tabular

$$\Delta y \approx \frac{0{,}43429}{N}.$$

2. Determinemos el logaritmo del número N_1, que no figura en las tablas y se halla entre dos números sucesivos, N y $N + 1$, que figuran en las tablas.

En la fórmula para el incremento del logaritmo

$$\Delta y \approx 0{,}43429 \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

hacemos: $x=N$, $\Delta x = N_1 - N < 1$. La corrección Δy al $\log N$ se determina por medio de la fórmula:

$$\Delta y \approx \frac{0,43429}{N} \cdot (N_1 - N).$$

Este incremento del logaritmo se encuentra en las columnas de las diferencias proporcionales.

El valor aproximado de $\log N_1$ es (fórmula V):

$$\log N_1 \approx \log N + \frac{0,43429}{N} \cdot (N_1 - N).$$

3. Determinemos el error relativo al hallar un número por medio de su logaritmo.

Supongamos que el logaritmo dado del número x ha sido tomado con el error Δy; por ello, al buscar por medio de él el número x, se admite el error Δx. Así pues, el error relativo del número x es:

$$\left| \frac{\Delta x}{x} \right| .$$

De la fórmula

$$\Delta y \approx 0,43429 \cdot \frac{\Delta x}{x}$$

se tiene:

$$\left| \frac{\Delta x}{x} \right| \approx \frac{|\Delta y|}{0,43429},$$

es decir, al hallar un número por medio de su logaritmo, el error relativo es igual a

$$\frac{|\Delta y|}{0,43429}$$

y no depende del valor del número, sino del error con que ha sido tomado el logaritmo del número x.

Si el logaritmo del número es *de cinco cifras, es decir*, ha sido tomado con la precisión

$$|\Delta y| \leqslant \frac{1}{2}\, 0,0001,$$

el error relativo máximo es:

$$\left| \frac{\Delta x}{x} \right| \approx \frac{1}{0,43429 \cdot 2 \cdot 100000} = \frac{1}{86858} .$$

El error absoluto al hallar el número x será igual a:

$$|\Delta x| \approx \frac{1}{86858} \cdot |x|.$$

De esto se deduce que no se puede considerar exacta la quinta cifra del número si éste pasa de 86858 y ha sido hallado en tablas de cinco cifras; tampoco será exacta la cuarta cifra si el número pasa de

8686 y ha sido hallado en las tablas de cuatro cifras. Al buscar un número con las tablas de cinco cifras no se puede garantizar en ningún caso la exactitud de la sexta cifra, y al buscar un número con las tablas de cuatro cifras no se puede garantizar la exactitud de la quinta cifra del número, por lo tanto no tiene sentido buscar, por ejemplo, la sexta y la séptima cifras del número con las tablas de cinco cifras.

4. Teorema. *El error relativo de un producto no supera la suma de los errores relativos de sus factores.*

Demostración. Supongamos $y = u \cdot v$. Tomando logaritmos y hallando la diferencial, se tiene:

$$\ln y = \ln u + \ln v;$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v},$$

de donde:

$$\left|\frac{dy}{y}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|.$$

Como $\left|\frac{dy}{y}\right|$ es el error relativo del producto y $\left|\frac{du}{u}\right|$ y $\left|\frac{dv}{v}\right|$ son los errores relativos de los factores, queda demostrado el teorema.

5. Teorema. *El error relativo de un cociente no supera la suma de los errores relativos del dividendo y el divisor.*

Demostración. Supongamos que $y = \frac{u}{v}$. Tomando logaritmos y hallando la diferencial, resulta:

$$\ln y = \ln u - \ln v;$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v},$$

de donde:

$\left|\frac{dy}{y}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|$, que era lo que se trataba de demostrar.

Si se busca el error relativo máximo, el signo $\leqslant$ se puede sustituir por el signo de la igualdad.

C. ELEMENTOS DEL CALCULO INTEGRAL

CAPITULO X

INTEGRAL INDEFINIDA

§ 113. La integración como operación inversa a la derivación

1°. La derivación consiste en hallar la derivada de la función dada o diferencial. La integración resuelve el problema inverso a la derivación.

La finalidad de la integración consiste en que dada una función $f(x)$ se buscan las funciones de las cuales es derivada dicha función.

Ejemplo. Hállese la función cuya derivada es x^2.

Solución. Si designamos la función buscada por $F(x)$, de acuerdo con la condición tendremos $F'(x) = x^2$ y hallaremos fácilmente que

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \quad \text{porque} \quad F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2.$$

La función obtenida $\frac{x^3}{3}$ se llama *función primitiva* o *integral* de x^2.

Se observa que si a $\frac{x^3}{3}$ se la añade un número cualquiera: 1, -2, etc., las funciones $\frac{x^3}{3} + 1$; $\frac{x^3}{3} - 2$, etc. son también soluciones del problema propuesto, porque la derivada de cada una de ellas es igual a x^2:

$$\left(\frac{x^3}{3} + 1\right)' = x^2; \quad \left(\frac{x^3}{3} - 2\right)' = x^2.$$

De esto se deduce que la función primitiva para x^2 no es única, *sino que existen infinidad de ellas*, las cuales representan una misma función $\frac{x^3}{3}$, a la cual se ha añadido cierto número constante. Designemos un número constante arbitrario por medio de la letra C. Para x^2, las primitivas serán las funciones de la forma:

$$\frac{x^3}{3}+C.$$

2°. En problemas concretos, la pluralidad de soluciones es eliminada mediante alguna condición complementaria.

E j e m p l o. Hállese la función cuya derivada es x^2, y cuyo valor es igual a 5 al ser $x = 3$.

S o l u c i ó n. La condición complementaria consiste aquí en que el valor de la función primitiva, que como se sabe es $\frac{x^3}{3}+C$, es igual a 5 al ser $x = 3$. Sustituyendo en $\frac{x^3}{3}+C$ la x por el número 3, se tiene:

$$\frac{3^3}{3}+C=5, \text{ de donde } C=-4.$$

Por lo tanto, la función buscada es única:

$$\frac{x^3}{3}-4.$$

3°. En la práctica a menudo es necesario encontrar magnitudes por medio de sus derivadas. Veamos algunos ejemplos.

E j e m p l o 1. La velocidad de un cuerpo es igual a t^2 *m/seg.* en cada instante de tiempo t. Determínese el espacio recorrido por el cuerpo durante t segundos, desde el principio del movimiento, si hasta ese momento se encontraba el cuerpo en reposo.

S o l u c i ó n. La velocidad del movimiento en el instante dado t es la derivada del espacio recorrido respecto al tiempo, $\frac{ds}{dt}$. En el caso examinado

$$\frac{ds}{dt}=t^2.$$

Y por lo tanto

$$s=\frac{t^3}{3}+C.$$

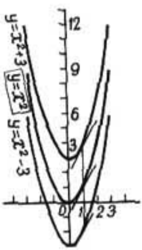
Para determinar el valor de C se tiene en cuenta la condición inicial de que antes de empezar el movimiento en cuestión, el cuerpo se encontraba en reposo. Esto significa que si $t = 0$, será $s = 0$.

Así pues, $0 = \frac{0}{3} + C$, de donde $C = 0$.

Por lo tanto, el espacio recorrido es:

$$s = \frac{t^3}{3}.$$

E j e m p l o 2. El coeficiente angular de la tangente en cada punto de una curva es igual a $2x$. Hállese la ecuación de esa curva sabiendo que pasa por el punto (2; 7).



F i g. 130

S o l u c i ó n. El coeficiente angular de la tangente es la tangente del ángulo formado por la tangente y el eje Ox, y es igual a la derivada de la función $y = F(x)$, cuya gráfica es la curva. En el caso dado

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Y hallamos fácilmente

$$y = x^2 + C.$$

Esta ecuación determina una infinidad de parábolas (*fig. 130*). *Cada una de ellas* representa la parábola $y = x^2$, desplazada a lo largo del eje Oy de tal modo que la ordenada de su vértice es igual a C (si $x = 0$, será $y = C$). En la figura se ha trazado en el punto $x = 1$ una tangente a cada una de las parábolas, y además las tangentes son paralelas, porque según la condición tienen un mismo coeficiente angular: $k = 2x = 2\cdot 1 = 2$.

Según la hipótesis del problema, la curva buscada pasa por el punto (2; 7), por lo tanto, las coordenadas (2; 7) satisfacen a la ecuación $y = x^2 + C$. Sustituyendo en dicha ecuación las coordenadas x e y por los números 2 y 7, se tiene:

$$7 = 2^2 + C;\ C = 3.$$

La curva buscada tiene la ecuación: $y = x^2 + 3$.

§ 114. La integral indefinida como expresión del conjunto de las funciones primitivas de la función dada

1°. Definición. *Se llama primitiva, o integral, de una función a toda función cuya derivada es igual a la función dada.*

De este modo, $F(x)$ es la función primitiva, o integral, de la función $f(x)$ si

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Cabe preguntar: ¿Tiene función primitiva cualquier función?

En los cursos superiores de análisis se demuestra que toda función continua en el segmento $[a, b]$ tiene función primitiva.

Más adelante se supone que la función dada $f(x)$ es continua.

2°. Teorema. *Una función que se diferencia de una función derivable en un número arbitrario, tiene la misma derivada que ésta.*

En efecto, si $\Phi(x) = F(x) + C$, en la que C es un número arbitrario y $F(x)$ es una función derivable, se tiene

$$\Phi'(x) = F'(x) + C' = F'(x)$$

(porque $C' = 0$), que es lo que se trataba de demostrar.

3°. Corolario. Si $F(x)$ es una función primitiva para la función dada $f(x)$, todas las funciones que se obtienen añadiendo a $F(x)$ una constante arbitraria C, es decir, todas las funciones de la forma $F(x) + C$, son asimismo funciones primitivas para la función dada $f(x)$, porque su derivada es también igual a $f(x)$.

Así pues, para la función continua dada $f(x)$ no existe una sola función primitiva, sino infinidad de ellas.

4°. Teorema recíproco. *La diferencia entre dos funciones primitivas cualesquiera, que tienen una misma derivada, es constante.*

Demostración. Según la condición, las funciones $\Phi(x)$ y $F(x)$ tienen una misma derivada, $f(x)$:

$$\Phi'(x) = f(x) \text{ y } F'(x) = f(x).$$

$\Phi(x)$ y $F(x)$ son funciones derivables, y, por lo tanto, su diferencia $\Phi(x) - F(x)$ es también una función derivable. Designando esta diferencia por medio de la letra y:

$$y = \Phi(x) - F(x),$$

y tomando su derivada, tenemos

$$y' = [\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Por lo tanto (§ 96, 1°), la diferencia $\Phi(x) - F(x)$ es constante. Designaremos esta diferencia por medio de la letra C:

$$\Phi(x) - F(x) = C.$$

5°. C o r o l a r i o. *Si se ha encontrado para la función dada $f(x)$ una función primitiva $F(x)$, se obtiene otra función primitiva cualquiera añadiendo a ésta cierta constante C, y tendrá la forma $F(x) + C$.*

Al ser la constante C arbitraria, $F(x) + C$ es la expresión del conjunto de todas las funciones primitivas para la función dada $f(x)$.

6°. D e f i n i c i ó n. *El conjunto de todas las funciones, cuyas derivadas son iguales a $f(x)$ se designa por medio del símbolo $\int f(x)\,dx$ y se denomina integral indefinida de la función $f(x)$.*

El símbolo $\int f(x)\,dx$ se lee: "integral indefinida de $f(x)\,dx$".

Según la definición:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{2}$$

En la igualdad (2), el símbolo $\int$ se llama signo integral y $f(x)$ se denomina función subintegral. Asimismo, $f(x) \cdot dx$ es la expresión subintegral, $F(x)$ se llama parte funcional de la integral indefinida, y C es la constante arbitraria de la integral indefinida.

7°. *Para hallar la integral indefinida de cualquier función es suficiente hallar una sola función primitiva de ella y añadir a ésta una constante arbitraria C.*

E j e m p l o s. 1) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$; 2) $\int 2x\,dx = x^2 + C$, 3) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$, puesto que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

§ 115. Propiedades de la integral indefinida

1°. De las igualdades $F'(x) = f(x)$ y $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ se deduce que:

a)
$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = \int dF(x),$$

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C,}$$

es decir, *la integral de la diferencial de una función es igual a esta función más una constante arbitraria.*

b)
$$\left[\int f(x)\,dx\right]' f(x);$$

o sea, *la derivada de la integral indefinida es igual a la función subintegral.*

c)
$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx;$$

es decir, *la diferencial de la integral indefinida es igual a la expresión subintegral.*

2°. *La integral indefinida de una suma algebraica de varias funciones es igual a la misma suma algebraica de las integrales indefinidas de los sumandos*, es decir, por ejemplo:

$$\int (z-u+v)\,dx = \int z\,dx - \int u\,dx + \int v\,dx,$$

puesto que

$$\left[\int (z-u+v)\,dx\right]' = z-u+v$$

y

$$\left[\int z\,dx - \int u\,dx + \int v\,dx\right]' = \left[\int z\,dx\right]' - \left[\int u\,dx\right]' + \left[\int v\,dx\right]' = z-u+v.$$

3°. *El factor constante de la función subintegral se puede sacar fuera del signo de la integral indefinida, es decir, si A es una constante, se tiene*

$$\int A\cdot f(x)\,dx = A\cdot\int f(x)\,dx,$$

puesto que

$$\left[\int A\cdot f(x)\,dx\right]' = A\cdot f(x)$$

y

$$\left[A\cdot\int f(x)\,dx\right]' = A\cdot\left[\int f(x)\,dx\right]' = A\cdot f(x).$$

§ 116. Integración inmediata

1°. 1. Como $d\,(x+C) = dx$,

$$\boxed{\int dx = x + C.} \qquad (1)$$

2. Como $d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = x^n\,dx$,

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.} \qquad (2)$$

La fórmula sirve para $n \neq -1$; si $n = -1$, la expresión $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ pierde el sentido numérico, ya que el denominador se transforma en cero, y la división por cero es imposible. Como $d\,(\ln|x| + C) = \frac{1}{x}\cdot dx = \frac{dx}{x}$, (§ 89, 5°),

$$\boxed{\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.} \qquad (3)$$

Como $d\,(e^x + C) = e^x\,dx$,

$$\boxed{\int e^x\,dx = e^x + C.} \qquad (4)$$

Como $d\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right) = a^x\,dx$,

$$\boxed{\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.} \qquad (5)$$

2°. Ejemplos. 1. Hállese $\int x^5\,dx$.

S o l u c i ó n. Según la fórmula (2):

$$\int x^5\,dx=\frac{x^{5+1}}{5+1}+C=\frac{x^6}{6}+C;$$

2. $$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx=\int x^{\frac{2}{3}}\,dx=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+C=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{5}\,x\sqrt[3]{x^2}+C.$$

3. Hállese $\int (x+1)(x-2)\,dx$.

S o l u c i ó n. Abriendo los paréntesis en la expresión subintegral, se tiene:

$$\int (x^2-x-2)\,dx.$$

Después de sustituir la integral de la suma por la suma de las integrales, resulta

$$\int x^2\,dx-\int x\,dx-\int 2\,dx,$$

y en la tercera integral se saca fuera del signo de la integral el factor constante 2, con lo que se tiene:

$$\int x^2\,dx-\int x\,dx-2\int dx.$$

Aplicando las fórmulas (2) y (1), resulta:

$$\int (x+1)(x-2)\,dx=\int x^2\,dx-\int x\,dx-2\int dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C.$$

4. Hállese $\int \frac{x^2-2x+3}{x^3}\,dx$.

S o l u c i ó n. Dividiendo en el numerador cada término por x^3, se tiene:

$$\int \frac{x^2-2x+3}{x^3}\,dx=\int (x^{-1}-2x^{-2}+3x^{-3})\,dx=$$

$$=\int \frac{dx}{x}-2\int x^{-2}\,dx+3\int x^{-3}\,dx=\ln|x|-2\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+$$

$$+3\cdot\frac{x^{-2}}{-2}+C=\ln|x|+\frac{2}{x}-\frac{3}{2x^2}+C.$$

3°. Se llama *método de integración por descomposición* al método por medio del cual la integral dada se representa en forma de una suma de integrales. Los ejemplos 3 y 4 han sido resueltos por el método de descomposición.

§ 117. Integración por sustitución

Para que la integral dada tenga la forma "tabular", es decir, la forma con que aparece en la tabla de fórmulas de integración, se emplea a veces *el método de cambio de variable*, llamado también método o *procedimiento de integración por sustitución.*

1°. T e o r e m a. *Supongamos que $F(u)$ es una función primitiva para la función $f(u)$. Si el argumento u se sustituye por una función del argumento x*

$$u=\varphi(x),$$

resulta

$$\int f(u)\,du=\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx. \tag{1}$$

D e m o s t r a c i ó n. Sustituyendo u por la función $\varphi(x)$, obtenemos una función compuesta:

$$f(u)=f[\varphi(x)].$$

La expresión subintegral $f(u)\,du$ es la diferencial de la función primitiva:

$$f(u)\,du=dF(u)=F'(u)\,du,$$

la fórmula de la diferencial también subsiste en el caso de que u sea una función de otro argumento (§ 111, 3°),

$$f(u)\,du=F'(u)\,du=F'(u)\cdot\varphi'(x)\cdot dx,$$

puesto que

$$du=d\varphi(x)=\varphi'(x)\,dx.$$

Pero según la condición, $F'(u)=f(u)=f[\varphi(x)]$, por lo tanto

$$f(u)\,du=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\cdot dx,$$

y por consiguiente,

$$\int f(u)\,du=\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\cdot dx.$$

2°. En la integración suele aplicarse la igualdad (1) expresada en orden contrario:

$$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\,dx=\int f(u)\,du.$$

3°. Hállese $\int (2x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx.$

Solución. La función subintegral es una función compuesta. Se introduce una nueva variable, suponiendo:

$$\varphi(x)=2x-3=u,$$

$$\varphi'(x)\,dx=2\,dx=du;\quad dx=\frac{1}{2}\,du.$$

Aplicando estas expresiones en la integral, se tiene:

$$\int (2x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx=\int u^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,du=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}+C.$$

4°. Hállese $\int\frac{dx}{3x+5}.$

Solución. Se introduce una nueva variable, suponiendo

$$\varphi(x)=3x+5=u;$$

$$\varphi'(x)\,dx=3\cdot dx=du;\quad dx=\frac{1}{3}\,du.$$

$$\int\frac{dx}{3x+5}=\int\frac{\frac{1}{3}\,du}{u}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{3}\ln|u|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln(3x+5)+C=\ln\sqrt[3]{3x+5}+C.$$

5°. Hállese $\int\frac{dx}{(2x-1)^2}.$

Solución. Se supone $2x-1=u$. Tomando las diferenciales, se tiene: $2\,dx=du$, $dx=\frac{1}{2}\,du$.

$$\int\frac{dx}{(2x-1)^2}=\int\frac{\frac{1}{2}\,du}{u^2}=\frac{1}{2}\int u^{-2}\,du=-\frac{1}{2u}+C=$$

$$=\frac{1}{2(1-2x)}+C.$$

6°. Hállese $\int e^{3x}\,dx$.

Solución. Con objeto de transformar la integral dada para aplicarle la fórmula (4), se supone $3x=u$, con lo que se tiene $dx=\frac{1}{3}\,du$:

$$\int e^{3x}\,dx=\int e^{u}\cdot\frac{1}{3}\,du=\frac{1}{3}\int e^{u}\,du=\frac{1}{3}\,e^{u}+C=\frac{1}{3}\,e^{3x}+C.$$

7°. Hállese $\int a^{nx}\,dx$.

Solución. Con objeto de transformar la integral dada para aplicarle la fórmula (5), se supone $nx=u$, con lo que se tiene $n\,dx=du$, $dx=\frac{1}{n}\,du$.

$$\int a^{nx}\,dx=\int a^{u}\cdot\frac{1}{n}\,du=\frac{1}{n}\int a^{u}\,du=\frac{1}{n}\cdot\frac{a^{u}}{\ln a}+C=\frac{a^{nx}}{n\ln a}+C.$$

8°. Hállese $\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}$.

Solución. La función subintegral $\frac{2x}{x^2+1}$ es fraccionaria; se supone que el denominador $x^2+1=u$. Tomando de los dos miembros de la igualdad las diferenciales, se obtiene el numerador $2x\,dx=du$;

$$\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln(x^2+1)+C.$$

9°. En general, si la función subintegral es fraccionaria, su numerador representa la derivada del denominador.

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx,$$

se supone $f(x)=u$, con lo que se tiene $f'(x)\,dx=du$:

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int\frac{du}{u}=\ln u+C=\ln|f(x)|+C.$$

10°. Hállese $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+5}}$.

Solución. En la función fraccionaria $\frac{x}{\sqrt{2x^2+5}}$ el numerador x no es, claro está, la derivada del denominador $\sqrt{2x^2+5}$, por lo tanto no es necesario poner $\sqrt{2x^2+5}$ igual a u.

Observando que la derivada de $2x^2+5$ da $4x$, se supone que $2x^2+5=u$ y se toman las diferenciales de los dos miembros de la igualdad: $4xdx = du$. De aquí que $xdx = \frac{1}{4}du$.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+5}} = \int \frac{\frac{1}{4}du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{4}\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2}\sqrt{u} +$$
$$+ C = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+5} + C.$$

11°. Hállese $\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx$.

Solución. La función subintegral está compuesta de dos funciones: una función de función $(\ln x)^3$ y una función simple $\frac{1}{x}$. Si se supone que $\ln x = u$, entonces $(\ln x)^3 = u^3$, y $\frac{dx}{x} = du$.

Por lo tanto,

$$\int \frac{(\ln x)^3\,dx}{x} = \int (\ln x)^3 \cdot \frac{dx}{x} = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C.$$

12°. Hállese $\int e^{x^4} \cdot x^3\,dx$.

Solución. Aquí, e^{x^4} es una función de función, y x^3 es una función simple. Suponiendo que $x^4 = u$, se obtiene $e^{x^4} = e^u$, que es una función simple de la variable u, y diferenciando la igualdad $x^4 = u$, resulta $x^3dx = \frac{1}{4}du$.

En ese caso $\int e^{x^4} \cdot x^3\,dx = \int e^u \cdot \frac{1}{4}du = \frac{1}{4}\int e^u\,du = \frac{1}{4}e^u + C = \frac{1}{4}e^{x^4} + C$.

13°. He aquí algunos ejemplos en los que se compaginan los métodos de integración por descomposición y por sustitución.

Cuando la función subintegral es una fracción algebraica, a veces se separa la parte entera de la función, dividiendo el numerador por el denominador de acuerdo con la regla de la división de polinomios.

Por ejemplo: $\int \frac{4x+2}{2x-1}dx = \int \left(2 + \frac{4}{2x-1}\right)dx = 2\int dx + 4\int \frac{dx}{2x-1}$. La primera integral es tabular, y la segunda se calcula por sustitución:

$$2x - 1 = u; \quad 2\,dx = du; \quad dx = \frac{1}{2}du.$$

$$2\int dx + 4\int \frac{dx}{2x-1} = 2x + 4\int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = 2x + 2\int \frac{du}{u} =$$
$$= 2x + 2\ln|u| + C = 2x + 2\ln|2x-1| + C.$$

14°. Si la función subintegral es un producto, conviene a veces transformar uno de los factores sin cambiar su magnitud.

Por ejemplo: $\int x\sqrt{x+1}\,dx$. Para aplicar la integración por sustitución, se suma y resta al primer factor x la unidad, con lo que se obtiene:

$$\int x\sqrt{x+1}\cdot dx = \int (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx =$$

$$= \int [(x+1)-1]\sqrt{x+1}\,dx = \int (x+1)\sqrt{x+1}\,dx -$$

$$- \int \sqrt{x+1}\,dx = \int (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx - \int (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Las dos integrales se calculan por sustitución:

$$x+1=u,\ dx=du.$$

$$\int (x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx - \int (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int u^{\frac{3}{2}}\,du - \int u^{\frac{1}{2}}\,du =$$

$$= \frac{2}{5}u^2\sqrt{u} - \frac{2}{3}u\sqrt{u} + C = \frac{2}{15}u\sqrt{u}\,(3u-5) + C =$$

$$= \frac{2}{15}(x+1)\sqrt{x+1}\,(3x+3-5) + C =$$

$$= \frac{2}{15}(x+1)(3x-2)\sqrt{x+1} + C.$$

§ 118. Fórmulas fundamentales de integración y ejemplos de su aplicación

1°. Al resolver los ejemplos del § 127 introdujimos una nueva variable u como función de x y después aplicamos las fórmulas de integración. Como tal procedimiento se emplea muy a menudo, es conveniente recordar las fórmulas para la variable u, considerando a u como argumento o como función de otro argumento, y a du como diferencial de u.

Tabla de las fórmulas fundamentales

I. $\int u^n\,du = \frac{n^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$. II. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.

III. $\int e^u\,du = e^u + C$. IV. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.

V. $\int \text{los}\, u\, du = \text{sen}\, u + C.$ VI. $\int \text{sen}\, u\, du = -\cos u + C.$

VII. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \text{tg}\, u + C.$ VIII. $\int \frac{du}{\text{sen}^2 u} = -\text{ctg}\, u + C.$

IX. $\int \frac{du}{1+u^2} = \text{arc tg}\, u + C.$ X. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arc sen}\, u + C.$

La validez de estas fórmulas se pone de manifiesto por medio de la derivación.

2°. Veamos algunos ejemplos de aplicación de las fórmulas (V) — — (VIII).

1) $\int \cos 5x \cdot dx.$

Solución. Cos $5x$ es una función de función. Para obtener una función simple y aplicar la fórmula (V), se supone $5x = u$, con lo que se tiene $\cos 5x = \cos u$, $dx = \frac{1}{5}\, du$.

$$\int \cos 5x\, dx = \int \frac{1}{5} \cos u\, du = \frac{1}{5} \text{sen}\, u + C = \frac{1}{5} \text{sen}\, 5x + C.$$

2) $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 3x}$. Para aplicar la fórmula (VIII), se supone que $3x = u$, con lo que se tiene $dx = \frac{1}{3}\, du$.

$$\int \frac{du}{\text{sen}^2 3x} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\text{sen}^2 u} = -\frac{1}{3} \text{ctg}\, u + C = -\frac{1}{3} \text{ctg}\, 3x + C.$$

3) $\int x \cdot \text{sen}\,(5x^2)\, dx$. Se supone $5x^2 = u$, con lo que se tiene $x\, dx = \frac{1}{10}\, du$.

$$\int x \cdot \text{sen}\,(5x^2)\, dx = \frac{1}{10} \int \text{sen}\, u\, du = -\frac{1}{10} \cos u + C =$$
$$= \frac{1}{10} \cos\,(5x^2) + C.$$

4) $\int \text{sen}^3 x \cdot \cos x \cdot dx$. Aquí, $\text{sen}^3 x$ es una función de función, y $\cos x$ es una función simple. Suponiendo $\text{sen}\, x = u$, se tiene $\text{sen}^3 x = u^3$, que es una función simple de la variable u.

Derivando la igualdad $\operatorname{sen} x = u$, resulta que $\cos x\, dx = du$.

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\, dx = \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 x + C.$$

5) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{3}\, dx}{2 + \cos \frac{x}{3}}$. Si se supone que $2 + \cos \frac{x}{3} = u$ y se toman de los dos miembros de la igualdad las diferenciales, se tiene:

$$-\frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{x}{3}\, dx = du, \quad \operatorname{sen} \frac{x}{3}\, dx = -3\, du,$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{3}\, dx}{2 + \cos \frac{x}{3}} = -3 \int \frac{du}{u} = -3 \ln |u| + C =$$

$$= -3 \ln \left(2 + \cos \frac{x}{3}\right) + C.$$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$. Como $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador del quebrado por $\cos \frac{x}{2}$ y teniendo presente que $\dfrac{\cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, se tiene:

$$\int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\cos \frac{x}{2}\, dx}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Se supone que $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ y se toman de los dos miembros de la igualdad las diferenciales: $\dfrac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = du$. Por lo tanto:

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{1}{u}\, du = \ln |u| + C = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

Conviene recordar que

$$\boxed{\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.}$$

7) $\int \frac{dx}{\cos x}$. Esta integral se lleva a la anterior por medio de la fórmula $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Suponiendo que $\frac{\pi}{2} + x = u$, se tiene $\cos x = \operatorname{sen} u$; $dx = du$.

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{du}{\operatorname{sen} u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right| + C.$$

Conviene recordar que

$$\boxed{\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right| + C.}$$

3°. Veamos algunos ejemplos de aplicación de las fórmulas fundamentales (IX) y (X).

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 16x^2}}$ la reducimos a la tabular $\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$ por medio de la sustitución $16x^2 = 25u^2$.

De aquí que: $4x = 5u$, $dx = \frac{5}{4}\, du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 16x^2}} = \frac{5}{4} \int \frac{du}{\sqrt{25 - 25u^2}} = \frac{5}{4} \int \frac{du}{5\sqrt{1 - u^2}} =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{4} \operatorname{arc\,sen} u + C = \frac{1}{4} \operatorname{arc\,sen} \frac{4}{5} x + C,$$

puesto que de la igualdad $4x = 5u$ se deduce que $u = \frac{4}{5} x$.

2) $\int \frac{dx}{5 + 3x^2}$ se reduce a la tabular $\int \frac{du}{1 + u^2}$ por medio de la sustitución $3x^2 = 5u^2$.

De aquí que: $x\sqrt{3} = u\sqrt{5}$; $dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\, du$.

$$\int \frac{dx}{5 + 3x^2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{5 + 5u^2} = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} \int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \int \frac{du}{1 + u^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arc\,tg} u + C = \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{3}{5}}\, x + C,$$

puesto que de la igualdad $x\sqrt{3}=u\cdot\sqrt{5}$ se deduce que $u=$ $=\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot x$.

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$ se reduce a $\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ por medio de la sustitución $5x^2=3u^2$.

De aquí que: $x\sqrt{5}=u\sqrt{3}$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\,du$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\int\frac{du}{\sqrt{3-3u^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\int\frac{du}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-u^2}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{5}{3}}\,x+C,$$

puesto que de la igualdad $x\sqrt{5}=u\sqrt{3}$ se deduce que

$$u=\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot x.$$

4) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^2 x}}$ se reduce a la tabular $\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ por medio de la sustitución $\operatorname{sen}^2 x=2u^2$.

De aquí que: $\operatorname{sen} x=u\sqrt{2}$, $\cos x\,dx=\sqrt{2}\cdot du$.

$$\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^2 x}}=\sqrt{2}\int\frac{du}{\sqrt{2-2u^2}}=\sqrt{2}\int\frac{du}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-u^2}}=$$
$$=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\operatorname{arc\,sen} u+C=\operatorname{arc\,sen}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}}+C,$$

puesto que de la igualdad $\operatorname{sen} x=u\sqrt{2}$ se deduce que $u=\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}}$.

5) $\int\frac{dx}{x(4+\ln^2 x)}$ se presenta así: $\int\frac{1}{4+(\ln x)^2}\cdot\frac{dx}{x}$ y se reduce a la tabular $\int\frac{du}{1+u^2}$ por medio de la sustitución $(\ln x)^2=4u^2$.

De aquí que: $\ln x=2u$, $\frac{dx}{x}=2\,du$.

$$\int\frac{1}{4+(\ln x)^2}\cdot\frac{dx}{x}=2\int\frac{du}{4+4u^2}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} u+C=$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\ln x}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\ln\sqrt{x}+C.$$

puesto que de la igualdad $\ln x=2u$ se deduce que $u=\frac{\ln x}{2}$.

4°. Es útil conocer las dos fórmulas siguientes:

$$\int \frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C. \tag{XI}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm 1}}=\ln|u+\sqrt{u^2\pm 1}|+C. \tag{XII}$$

Examinemos algunos ejemplos para la aplicación de estas fórmulas.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}}$ se reduce a la tabular $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$ por medio de la sustitución $4x^2=3u^2$.

De aquí que: $2x=u\sqrt{3}$, $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\,du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{\sqrt{3u^2-3}}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-1}|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{4x^2}{3}-1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{|2x+\sqrt{4x^2-3}|}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-3}|+$$

$$+C-\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-3}|+C,$$

puesto que $\ln\sqrt{3}$, por ser constante, puede incorporarse a C.

2) $\int \frac{x+4}{4x^2-5}\,dx$ se presenta en forma de suma de integrales, dividiendo cada término del numerador por el denominador:

$$\int \frac{x+4}{4x^2-5}\,dx=\int \frac{x\,dx}{4x^2+5}+4\int \frac{dx}{4x^2-5}=\int \frac{x\,dx}{4x^2-5}-4\int \frac{dx}{5-4x^2}.$$

La primera integral se calcula por medio de la sustitución

$$4x^2-5=u,\quad 8x\,dx=du,\quad x\,dx=\frac{1}{8}\,du.$$

$$\int \frac{x\,dx}{4x^2-5}=\frac{1}{8}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{8}\ln|u|+C=\frac{1}{8}\ln|4x^2-5|+C.$$

La segunda integral se reduce a la integral $\int \frac{du}{1-u^2}$ por medio de la sustitución $4x^2=5t^2$.

De aquí que: $2x = t\sqrt{5}$, $dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\,dt$.

$$\int \frac{dx}{5-4x^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\int \frac{dt}{5-5t^2} = \frac{\sqrt{5}}{5\cdot 2}\int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{1+\frac{2}{\sqrt{5}}x}{1-\frac{2}{\sqrt{5}}x}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2x}{\sqrt{5}-2x}\right| + C,$$

puesto que $t = \frac{2}{\sqrt{5}}x$.

Finalmente: $\int \frac{x+4}{4x^2-5}\,dx = \frac{1}{8}\ln|4x^2-5| - \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}+2x}{\sqrt{5}-2x} + C.$

§ 119. Integración de potencias de sen x, cos x, tg x y ctg x

En este parágrafo los exponentes se consideran enteros y positivos.

1°. $\int \operatorname{sen}^m x\,dx$ y $\int \cos^m x\,dx$, siendo m un número impar.

Por ejemplo, hállese $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

Solución. En primer lugar se transforma la función subintegral:

$$\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen}^2 x\cdot\operatorname{sen} x = (1-\cos^2 x)\cdot\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x - \cos^2 x\cdot\operatorname{sen} x,$$

con lo que $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int \operatorname{sen} x\,dx - \int \cos^2 x\cdot\operatorname{sen} x\cdot dx.$

La primera integral es tabular y la segunda se calcula por sustitución:

$$\cos x = u,\quad \cos^2 x = u^2,\quad \operatorname{sen} x\,dx = -du.$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx - \int \cos^2 x\operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} -$$

$$-\cos x + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

2°. $\int \operatorname{sen}^m x\,dx$ y $\int \cos^m x\,dx$, siendo m un número par, se calculan por medio de las fórmulas trigonométricas ya conocidas:

$$1-\cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \quad\text{y}\quad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

que se toman así:

$$\text{(XIII)} \quad \boxed{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};} \qquad \boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}} \quad \text{(XIV)}$$

Estas fórmulas rebajan el grado de la potencia de la función.

Ejemplo 1. Hállese $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

Solución. Se aplica la fórmula (XIII):

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx.$$

La primera integral es tabular y la segunda se calcula por medio de la sustitución $2x = u$, $dx = \frac{1}{2}\, du$.

Efectuando la sustitución, resulta: $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}$

$$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos u\, du = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + C =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$$

Ejemplo 2. Calcúlese $\int \cos^4 x\, dx$.

Solución. Se empieza transformando la función $\cos^4 x$ por medio de la fórmula (XIV):

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x).$$

A $\cos^2 2x$ se le vuelve a aplicar la fórmula (XIV), con lo que se tiene:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\,\frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Así pues, $\int \cos^4 x\, dx = \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx$.

Suponiendo $2x = u$, $dx = \frac{1}{2}\, du$, $4x = t$, $dx = \frac{1}{4}\, dt$, se tiene:

$$\frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos u\, du + \frac{1}{32}\int \cos t\, dt = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} u +$$

$$+ \frac{1}{32}\operatorname{sen} t + C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C.$$

3°. $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$ y $\int \operatorname{ctg}^m x\,dx$ se calculan mediante la aplicación *sucesiva de las fórmulas trigonométricas* *:

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1} \quad \text{(XV)} \quad \text{y} \quad \boxed{\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1.} \quad \text{(XVI)}$$

La transformación persigue la finalidad de obtener integrales de la forma:

$$\int \operatorname{tg}^n x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ y } \int \operatorname{ctg}^n x \cdot \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x},$$

que se calculan respectivamente por las sustituciones:

$$\operatorname{tg} x = u, \ \frac{dx}{\cos^2 x} = du,$$
$$\operatorname{ctg} x = u, \quad \frac{dx}{\operatorname{Sen}^2 x} = -du.$$

E j e m p l o. Hállese $\int \operatorname{tg}^3 x \cdot dx$.

S o l u c i ó n. Transformemos $\operatorname{tg}^3 x$ según la fórmula (XV):

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x =$$
$$= \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Así pues,

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos x}.$$

Suponiendo $\operatorname{tg} x = u$, $\frac{dx}{\cos^2 x} = du$; $\cos x = t$, $\operatorname{sen} x\,dx = -dt$, se tiene:

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int u\,du + \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} u^2 - \ln|t| + C =$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C.$$

---

* Estas fórmulas resultan de las igualdades:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \ \operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

§ 120. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Calculemos $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$. Suponiendo $x = a \cdot \operatorname{sen} \varphi$, se tiene:

$$x^2 = a^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi, \quad dx = a \cdot \cos \varphi \, d\varphi,$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi} \cdot a \cdot \cos \varphi \, d\varphi =$$

$$= a^2 \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi} \cdot \cos \varphi \, d\varphi = a^2 \int \cos^2 \varphi \cdot d\varphi =$$

$$= a^2 \cdot \int \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int d\varphi + \frac{1}{2} a^2 \int \cos 2\varphi \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \varphi + \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sen} 2\varphi + C.$$

$\int \cos 2\varphi \cdot d\varphi$ ha sido calculada por medio de las sustituciones $2\varphi = t$, $d\varphi = \frac{1}{2}\, dt$.

Hallemos los valores de φ y $\operatorname{sen} 2\varphi$.

Como $x = a \cdot \operatorname{sen} \varphi$, $\operatorname{sen} \varphi = \frac{x}{a}$, y $\varphi = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}$.

$$\operatorname{sen} 2\varphi = 2 \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \varphi = 2 \operatorname{sen} \varphi \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Los valores hallados $\varphi = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}$ y $\operatorname{sen} 2\varphi = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}$ se colocan dentro del signo de la integral:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} a^2 \varphi + \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sen} 2\varphi + C =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} + C,$$

de aquí que

$$\boxed{\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C}$$

(XVII)

Para recordar esta fórmula se representan geométricamente sus términos: el primer término de la fórmula $\frac{1}{2}\ a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ a^2\varphi$ es el área del sector AOB (fig. 131) de radio a y arco φ; el segundo término $\frac{1}{2}\ x\ \sqrt{a^2 - x^2}$ es el área de un triángulo cuya hipotenusa es igual a a, y el cateto opuesto al ángulo φ es igual a x.

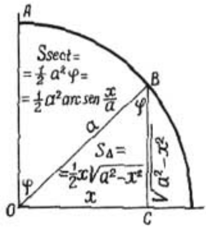


Fig. 131

§ 121. Integración por partes

1°. El diferencial del producto de dos funciones $u(x)$. $v(x)$; abreviado, uv. Apliquemos la fórmula (III) del capítulo IX:

$$d(uv) = (uv)'\ dx = (vu' + uv')\ dx = vu'\ dx + uv'\ dx.$$

Ya que

$$u'\ dx = u'(x)\ dx = du \text{ y } v'\ dx = v'(x)\ dx = dv,$$

entonces

$$\boxed{d(uv) = v\,du + u\,dv.}$$

2°. Fórmula de integración por partes. Tomemos la integral del diferencial del producto:

$$\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv,$$

ó

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv.$$

De aquí hallamos que

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.} \qquad \text{(XVIII)}$$

La fórmula obtenida (XVIII) se llama *fórmula de integración por partes.*

3°. Ejemplos: 1. Hallar $\int \ln x\,dx$.

Solución. Apliquemos la fórmula de integración por partes. Supongamos que: $u=\ln x$, $dv=dx$; entonces $du=\frac{dx}{x}$; $v=x$. En realidad, $\int dv=x+c$, pero, para hallar la integral (indeterminada) indefinida $\int \ln x\,dx$, es suficiente hallar una función primitiva cualquiera, cuya derivada sea igual a $\ln x$ (§ 114, 7°). Por eso $\int dv$ se puede considerar igual a v.

De este modo, según la fórmula (XVIII):

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C.$$

2. Hallar $\int x\cdot\operatorname{sen} x\,dx$.

Solución. Supongamos: $u=x$, $dv=\operatorname{sen} x\,dx$. De aquí

$$du=dx,\ v=-\cos x;$$

$$\int x\operatorname{sen} x\,dx=-x\cos x-\int(-\cos x)\,dx=-x\cos x+$$

$$+\int\cos x\,dx=-x\cos x\operatorname{sen} x+C.$$

3. Hallar $\int \operatorname{arc}\cos x\,dx$.

Solución. Se suponga que: $u=\operatorname{arc}\cos x$, $dv=dx$. Entonces

$$du=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad v=x;$$

$$\int\operatorname{arc}\cos x\,dx=x\operatorname{arc}\cos x+\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La segunda integral se halla, por medio de la sustitución

$$1-x^2=t,\ -2x\,dx=dt,\ x\,dx=-\frac{1}{2}\,dt.$$

Se obtiene:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt=-t^{\frac{1}{2}}+C=-\sqrt{1-x^2}+C;$$

$$\int\operatorname{arc}\cos x\,dx=x\operatorname{arc}\cos x-\sqrt{1-x^2}+C.$$

4°. Ejemplos, en los que se debe integrar por partes varias veces.

4) Hallar $\int x^2 \cos x\, dx$.

Solución. Se supone que: $u = x^2$, $dv = \cos x\, dx$. Entonces

$$du = 2x\, dx, \quad v = \operatorname{sen} x;$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2\int x \operatorname{sen} x\, dx.$$

$\int x \operatorname{sen} x\, dx$ se halla por medio de la integración por partes (véase el ejemplo 2) y es igual a $-x\cos x + \operatorname{sen} x + C$.

Por lo tanto,

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2(x \cos x - \operatorname{sen} x) + C.$$

5) Hallar $\int x^3 e^x\, dx$.

Solución. Supongamos que: $u = x^3$, $dv = e^x\, dx$. Entonces

$$du = 3x^2\, dx, \ v = e^x;$$

$$\int x^3 e^x\, dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x\, dx.$$

Ahora se supone que: $u_1 = x^2$, $dv = e^x\, dx$, y se obtiene:

$$du_1 = 2x\, dx, \quad v = e^x;$$

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx.$$

Y si $u_2 = x$, $dv = e^x\, dx$, resulta:

$$du_2 = dx, \quad v = e^x;$$

$$\int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x + C.$$

Por eso,

$$\int x^3 e^x\, dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\, e^x + C.$$

5°. Ejemplos, en los cuales la integración por partes conduce a la igualación respecto a la integral dada.

6) Hallar $\int \cos^2 x\, dx$.

Solución. La integral dada puede hallarse disminuyendo la potencia de $\cos x$ por medio de la aplicación de la formula

$\cos^2 x + \frac{1+\cos 2x}{2}$, pero la hallaremos por integración por partes. Supongamos que: $u = \cos x$, $dv = \cos x\, dx$. Entonces $du = -\operatorname{sen} x\, dx$, $v = \operatorname{sen} x$;

$$\int \cos^2 x\, dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen}^2 x\, dx.$$

Sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x$ por $1-\cos^2 x$, resulta:

$$\int \cos^2 x\, dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int (1-\cos^2 x)\, dx = \operatorname{sen} x \cos x + x -$$

$$-\int \cos^2 x\, dx.$$

Obtenemos una ecuación respecto a $\int \cos^2 x dx$ y allamos de ella que

$$2\int \cos^2 x\, dx = \operatorname{sen} x \cos x + x + C \text{ y}$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x \cos x + x) + C = \frac{1}{4}(\operatorname{sen} 2x + 2x) + C.$$

7) Hallar $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$.

Solución. Supongamos que: $u = \sqrt{a^2+x^2}$, $dv = dx$. Entonces

$$du = -\frac{x\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad v = x;$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

En el numerador de la segunda integral a x^2 se le añade $\pm a^2$ y se obtiene:

$$\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sqrt{a^2-x^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Obtengamos una ecuación respecto a la integral dada. Hallamos que

$$2\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

La última integral se reduce a una tabular por medio de la sustitución

$$x^2 = a^2t^2, \quad a^2 - x^2 = a^2 - a^2t^2 = a^2(1-t^2),$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-t^2}, \quad dx = a\,dt;$$

$$a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\int\frac{a\,dt}{a\sqrt{1-t^2}} = a^2 \operatorname{arc\,sen} t + C = a^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C.$$

Por lo tanto,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C.$$

6°. Observación. Al integrar por partes surge el problema: qué tomar en la expresión subintegral como u y qué sustituir por dv. Sin duda, es necesario sustituir por dv aquella diferencial para la cual es conocida la integral, o ésta puede hallarse.

Pero a veces, se pueden tomar como dv ambas funciones de la expresión subintegral. En ambos casos v se puede hallar. Por ejemplo, en $\int x^2 \cos x\,dx$, si $dv = x^2\,dx$, entonces $v = \frac{x^3}{3}$, y si $dv = \cos x dx$, $v = \operatorname{sen} x$. ¿Qué consideración es necesario tener en cuenta?

La diferenciación, en una serie de casos, simplifica la expresión, es decir, las derivadas de algunas funciones trascendentes (la logarítmica, las circulares inversas) son algebraicas. Por lo tanto, en las integrales:

$$\int M(x)\ln x\,dx, \quad \int M(x) \operatorname{arc\,sen} x\,dx, \quad \int M(x) \operatorname{arc\,tg} x,$$

donde $M(x)$ es un polinomio respecto a x, es necesario sustituir por u la función trascendente, y $M(x)\,dx$ por dv. En las integrales, por ejemplo:

$$\int M(x)e^x\,dx, \quad \int M(x)\operatorname{sen} x\,dx, \quad \int M(x)\cos x\,dx,$$

hay que tomar $M(x)$ por u y $e^x\,dx$, $\operatorname{sen} x\,dx$, $\cos x dx$ por dv.

§ 122. Observación

Al terminar el capítulo acerca de la integral indefinida, volvemos a señalar que una de las *finalidades del cálculo integral* consiste en hallar la función primitiva por medio de la derivada dada $f(x)$, y que si la función dada $f(x)$

es continua en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, existe para ella función primitiva. Pero si cada función continua $f(x)$ tiene función primitiva, ¿puede hallarse esta función primitiva?

El análisis contesta así a esta pregunta: no todas las integrales indefinidas pueden expresarse por medio de funciones algebraicas, trigonométricas, circulares inversas, logarítmicas y exponenciales como resultado de las operaciones elementales realizadas con ellas.

Por ejemplo, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int e^{x^2}\,dx$, $\int \operatorname{sen}(x^2)\,dx$, $\int \cos(x^2)\,dx$, $\int \frac{e^x}{x}\,dx$, $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ no pueden ser calculadas como resultado de las operaciones matemáticas elementales. Los valores de estas integrales pueden ser hallados con la aproximación que se desee por medio de métodos especiales.

El cálculo integral enseña el procedimiento para calcular integrales de algunas funciones, aunque, en realidad, éstas son bastante numerosas.

De los métodos de integración existentes, hemos examinado únicamente los más sencillos, aplicándolos, además, a funciones muy elementales.

CAPITULO XI

LA INTEGRAL DEFINIDA Y SU APLICACION

§ 123. La integral definida como valor de la magnitud de variación de la función primitiva

Examinemos la manera de hallar la magnitud de la variación de una función $f(x)$ por medio de su derivada $f(x)$ al variar el valor del argumento x desde $x = a$ hasta $x = b$. Supongamos que la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, siendo $a < b$.

1°. T e o r e m a. *Al variar el argumento x desde $x = a$ hasta $x = b$, cada una de las funciones primitivas de la función $f(x)$ tiene un mismo incremento.*

D e m o s t r a c i ó n. De las numerosas funciones primitivas tomamos dos funciones primitivas cualesquiera cuya derivada sea $f(x)$ y las designamos por $F(x)$ y $\Phi(x)$. La diferencia entre sus valores es cierto número C.

$$F(x) - \Phi(x) = C,$$

y por lo tanto,

$$F(x) = \Phi(x) + C.$$

Determinemos los valores de estas dos funciones primitivas, para $x = b$ y $x = a$.

Si $x = b$ $F(b) = \Phi(b) + C$,
si $x = a$ $F(a) = \Phi(a) + C$.

Restando de la primera igualdad la segunda, se tiene:

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a),$$

que era lo que se trataba de demostrar.

2° . D e f i n i c i ó n. *La diferencia $F(b) - F(a)$, que es el valor del incremento de cualquier función primitiva de la función dada $f(x)$ al variar el argumento x desde a hasta b, se llama integral definida de la función $f(x)$ entre los límites* *a y b y se indica por medio de:*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Los números a y b se llaman respectivamente límite inferior y superior de la integral definida. Es evidente que los números a y b no son "límites" de ninguna clase, según el concepto que tenemos del término "límite"; tales números son los límites del campo de variación de x que examinamos.

La notación $\int_a^b f(x)\,dx$ se lee: "integral definida desde a hasta b de $f(x)\,dx$". Según la definición:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).} \qquad \text{(XIX)}$$

Esta fórmula se denomina fórmula de Leibniz — Newton (regla de Barrow).

3°. Regla. *Para calcular una integral definida es suficiente:*

1) *calcular la integral indefinida de la función dada;*

2) *tomar la parte funcional de la integral indefinida y sustituir en ella la x en primer lugar por el límite superior b, y luego, por el límite inferior a, y del primer resultado de la sustitución, restar el segundo.*

La segunda operación se expresa por medio del símbolo

$$[F(x)]_a^b, \text{ o } F(x)\Big|_a^b \text{ o } \Big|_a^b F(x).$$

En todos los casos se lee: "el valor $F(x)$ en la sustitución desde a hasta b". Nos serviremos del símbolo $\Big|_a^b F(x)$.

La regla del cálculo de la integral definida se escribe simbólicamente así:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)} \qquad \text{(XIXa)}$$

Hay que tener presente que en esta fórmula la función $f(x)$ se encuentra dentro del signo de la integral $\left(\int\limits_a^b\right)$ y que la función primitiva $F(x)$, que es la parte funcional de la integral indefinida, se encuentra dentro del signo de la sustitución $\left(\Big|_a^b\right)$.

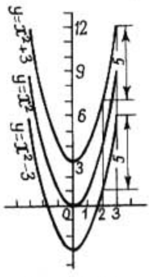
E j e m p l o. Para calcular $\int\limits_1^2 x^3\,dx$:

1) hallamos la integral indefinida $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$,

2) la parte funcional es $\frac{x^4}{4}$, el valor de $\frac{x^4}{4}$ en la sustitución desde 1 hasta 2:

$$\Big|_2^1 \frac{x^4}{4} = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4} = 3\,\frac{3}{4}\,.$$

4°. E j e m p l o s: 1. El coeficiente angular de la tangente en cada punto de una curva es igual a $2x$. Véase en cuánto cambia la ordenada de un punto de esta curva al variar la abscisa desde 2 hasta 3.



F i g. 132

S o l u c i ó n. Según la condición:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Por lo tanto, la ordenada y es una función primitiva para $2x$:

$$y = \int 2x\,dx,$$

o

$$y = x^2 + C.$$

En la figura 132 están representadas estas curvas para los diferentes valores de C: -3, 0, $+3$.

Al variar x desde 2 hasta 3, la ordenada y varía en una magnitud igual a $\int\limits_2^2 2x\,dx$.

$$\int\limits_2^3 2x\,dx = \Big|_2^3 x^2 = 3^2 - 2^2 = 5$$

En la figura 132, este incremento de la ordenada, igual a 5, está señalado en las diversas curvas: $y = x^2 - 3$, $y = x^2$, $y = x^2 + 3$.

2. Determínese el espacio recorrido por un punto material durante el tiempo desde $t = 3$ minutos hasta $t = 9$ minutos, si la velocidad del movimiento del punto en cada instante t es t^2 m/min.

S o l u c i ó n. La velocidad del movimiento en cada instante es la derivada del espacio recorrido respecto al tiempo $\frac{ds}{dt}$. Según la condición:

$$\frac{ds}{dt} = t^2.$$

Supongamos que s es una función primitiva para t^2. El valor del espacio s recorrido desde $t = 3$ minutos hasta $t = 9$ minutos es una magnitud en la cual varía la función primitiva de t^2 al variar el argumento t desde 3 hasta 9, y es igual a $\int_3^9 t^2\,dt$. Calculemos $\int_3^9 t^2\,dt$.

1) $\int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C$;

2) $\int_3^9 t^2\,dt = \left|_3^9 \frac{t^3}{3} = \frac{9^3}{3} - \frac{3^3}{3} = 243 - 9 = 234.\right.$

Por lo tanto, $s = 234$ metros.

3. La capacidad calorífica de 1 kilogramo de agua varía según la temperatura t de acuerdo con la ley: $f(t) = 1 + 0{,}00004t + 0{,}0000009t^2$. Determínese la cantidad de calor que se consume para elevar la temperatura de $1 m^3$ de agua desde 10° hasta 60°.

S o l u c i ó n. Para $1 m^3$ de agua, la capacidad calorífica

$$f(t) = 1000 + 0{,}04t + 0{,}0009t^2.$$

La capacidad calorífica es la derivada de la cantidad de calor respecto a la temperatura $\frac{dQ}{dt}$:

$$\frac{dQ}{dt} = 1000 + 0{,}04t + 0{,}0009t^2.$$

Para la función dada $f(t)$, la cantidad de calor Q es una función primitiva. En el problema es necesario saber en cuánto varía ésta al variar t desde 10° hasta 60°, es decir, se trata de calcular la integral definida

$$\int_{10}^{60} (1000 + 0{,}04t + 0{,}0009t^2)\,dt.$$

Calculemos la integral indefinida:

$$\int (1000 + 0{,}04t + 0{,}0009t^2)\,dt = 1000t + 0{,}02t^2 + 0{,}0003t^3 + C$$

y su valor en la sustitución desde 10 hasta 60:

$$\Big|_{10}^{60}(1000t+0{,}02t^2+0{,}0003t^3)=(60000+72+64{,}8)-$$

$$-(10000+2+0{,}3)=50134{,}5.$$

Así pues, para calentar $1 m^3$ de agua desde 10° hasta 60° se consumen 50 134,5 calorías-kilogramo.

§ 124. La integral definida como función

1°. En la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, *los límites a y b son en realidad ciertos valores determinados* de x, además son tales que la función dada $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$. Manteniendo invariable el límite inferior a, consideramos variable el superior b, designándolo por medio de la letra x.

En este caso, la integral definida toma la forma:

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Como a cada valor de x corresponde cierto número determinado, el valor de la diferencia $F(x) - F(a)$, *la integral definida* $\int_a^x f(x)\,dx$ *es una función de su límite superior.*

2°. De las muchísimas funciones primitivas $F(x) + C$, cuya derivada es $f(x)$, buscamos aquella que es igual a cero al ser $x = a$.

Sustituyendo en $F(x) + C$ la x por el número a, obtenemos:

$$F(a) + C = 0,$$
$$C = -F(a).$$

De aquí se deduce que la función primitiva buscada es $F(x) - F(a)$. Pero

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Por lo tanto, *la integral definida* $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ *es la función primitiva particular de* $f(x)$, *que se anula para* $x = a$.

3°. Correlación entre las integrales definida e indefinida. Como $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ es una función primitiva particular de $f(x)$, precisamente la que se anula para $x=a$, cualquier otra función primitiva se diferencia de ella en una constante C. Es decir, la integral indefinida se diferencia de la definida en una constante arbitraria C.

$$\int f(x)\,dx = \int\limits_a^x f(x)\,dx + C$$

§ 125. Significado geométrico de la integral definida

1°. En la figura 133 está representada gráficamente una función continua positiva $y = f(x)$. Tomemos en esta curva $y = f(x)$ dos puntos A y M y supongamos que A está inmóvil, y que el punto M es móvil. De acuerdo con esto, las coordenadas del punto A son constantes $[a, f(a)]$, y las del punto M son variables (x, y). A cada valor determinado de x corresponde un área determinada S del trapecio curvilíneo A_1AMM_1 limitado por el arco AM, el eje Ox y por las ordenadas A_1A y M_1M de los puntos A y M. Por eso, el área S es función de x, función positiva, porque todos los valores de S son positivos.

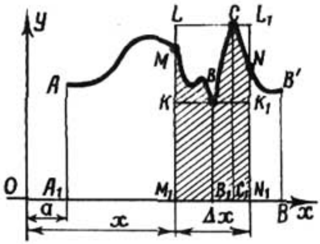


Fig. 133

Mostremos que S *es función, primitiva para la función dada* $f(x)$. Para eso se halla la derivada de S respecto a x. Fijemos el valor de x e incrementémosle en Δx. En este caso, el área S experimentará un incremento ΔS, igual al área de la figura M_1MNN_1.

Supongamos que la función $y = f(x)$ crece unas veces y decrece otras. En el intervalo M_1N_1 de variación de Δx

existirán la ordenada menor B_1B y la mayor C_1C (§ 105); tomémoslas como alturas de los rectángulos. $M_1KK_1N_1$ y $M_1LL_1N_1$ con la base Δx. Resulta:

$$\text{el área } M_1KK_1N_1 < \Delta S < \text{área } M_1LL_1N_1,$$

porque la primera figura es parte de la segunda, y la segunda es parte de la tercera.

Pero el área $M_1KK_1N_1 = \Delta x \cdot B_1B$, y el área $M_1LL_1N_1 = \Delta x \cdot C_1C$, por lo tanto

$$\Delta x \cdot B_1B < \Delta S < \Delta x \cdot C_1C.$$

Dividiendo estas desigualdades por Δx, se tiene:

$$B_1B < \frac{\Delta S}{\Delta x} < C_1C.$$

Hagamos que Δx tienda a cero. Si $\Delta x \to 0$, las ordenadas variables B_1B y C_1C, debido a la continuidad de la curva, tienen como límite la ordenada constante $M_1M = y$. Por eso (§ 58)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = M_1M = y,$$

ó

$$\frac{dS}{dx} = y,$$

es decir, *la derivada del área S respecto a la abscisa x es igual a la ordenada y de la curva en el punto x.*

Pero como $y = f(x)$,

$$\frac{dS}{dx} = f(x).$$

De aquí se deduce que *el área S es una función, primitiva para la función dada $f(x)$.*

El área A_1AMM_1 es la función primitiva de $f(x)$, que se anula para $x = a$. En efecto, si el punto móvil M coincide con el punto constante A, es decir, resulta que $x = a$, el área A_1AMM_1 S se transforma en cero. Por eso (§ 124).

$$S = \int_a^x f(x)\,dx.$$

Para obtener el valor del área $A_1AB'b$ (fig. 138), situada entre las ordenadas $x = a$ y $x = b$, es suficiente sustituir x por su valor dado b, con lo que se tiene

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx} \qquad \text{(XX)}$$

Hemos obtenido el siguiente *significado geométrico de la integral definida*: *la integral definida* $\int_a^b f(x)\,dx$ *de una función positiva continua* $f(x)$ *es igual al valor del área comprendida entre la línea* $y = f(x)$, *el eje* Ox *y las dos ordenadas* $x = a$ *y* $x = b$.

2°. Ejemplo. Calcúlese el área limitada por la línea $y = x^3$, el eje Ox y las ordenadas $x = 1$ y $x = 2$ (fig. 124).

Solución. Fórmula fundamental: el área

$$S = \int_a^b y \cdot dx.$$

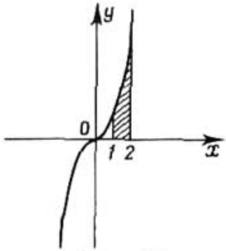


Fig. 134

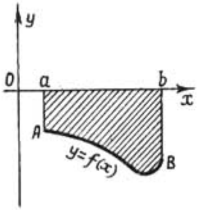
Según la condición: $y = x^2$, $a = 1$, $b = 2$. Por eso

$$S = \int_1^2 x^3\,dx = \Big|_1^2 \frac{x^4}{4} = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 3\,\frac{3}{4}\,.$$

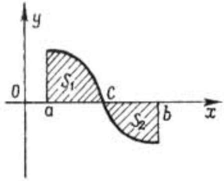
§ 126. Suplementos

1°. En el párrafo anterior se ha demostrado que el área limitada por la línea $y = f(x)$, por las ordenadas de dos de sus puntos a y b y por el eje Ox es una función, primitiva para $f(x)$, si en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ $f(x)$ es positiva, $f(x) > 0$, es decir, si la línea $y = f(x)$ se encuentra situada en el semiplano superior con respecto al eje Ox. Esto es también cierto en el caso de que $f(x)$ sea negativa en el segmento $[a, b]$, $f(x) < 0$, o sea, la línea $y = f(x)$ se encuentra situada en el semiplano inferior con respecto al eje Ox.

Si la función tiene valores negativos, para obtener la expresión de S del área limitada por la línea $y = f(x)$, por el eje Ox y por las ordenadas $x = a$ y $x = b$ (fig. 135), se pueden repetir los razonamientos anteriores, con la única particularidad de que al valor del área, situada debajo del eje Ox, es necesario ponerle el signo negativo, porque las



F i g. 135



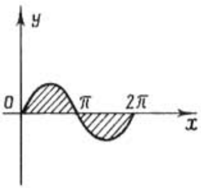
F i g. 136

ordenadas de los puntos de la curva son negativas, es decir,

$$\frac{ds}{dx} = y < 0$$

y el valor de $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ es negativo.

Si en el segmento $[a, b]$ la curva $y = f(x)$ corta al eje Ox (fig. 136), $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *es igual a la suma algebraica de las áreas S_1 y S_2; además, el área situada encima del eje Ox se toma con signo más y la que se halla debajo del eje Ox, con signo menos.*



F i g. 137

Conociendo el significado geométrico de la integral definida, se puede calcular el área limitada entre la curva $y = f(x)$, el eje Ox y las ordenadas $x = a$ y $x = b$. Pero hay que recordar que *el área es un número positivo, y para obtenerla, si una parte de la figura se encuentra situada debajo del eje Ox y la otra parte encima, hay que hallar la suma de las magnitudes absolutas de las integrales S_1 y S_2* (fig. 136).

E j e m p l o. Calcúlese el área limitada por una onda de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ y el eje Ox (fig. 137).

Solución. Una parte del área $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ se encuentra encima del eje Ox, y la otra $(\pi \leqslant x \leqslant 2\pi)$, debajo de dicho eje. Estas áreas se calculan por separado:

$$\text{la primera parte } S_1 = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \Big|_0^{\pi} -\cos x = -\cos \pi +$$
$$+ \cos 0 = 1 + 1 = 2,$$
$$\text{la segunda parte } S_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \Big|_{\pi}^{2\pi} -\cos x =$$
$$= -\cos 2\pi + \cos \pi = -1 - 1 = -2.$$

Toda el área $s = |s_1| + |s_2| = 2 + 2 = 4.$

Resultará un absurdo si por no prestar atención a la situación del área respecto al eje Ox se calcula la integral en los límites desde 0 a 2π.

En efecto, se obtiene:

$$S = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \Big|_0^{2\pi} -\cos x = -2\pi + \cos 0 = 0.$$

§ 127. La integral definida como límite de la suma

1°. En los cursos superiores de análisis se demuestra *el teorema de la existencia de la integral definida*. El contenido de este teorema consiste en lo siguiente.

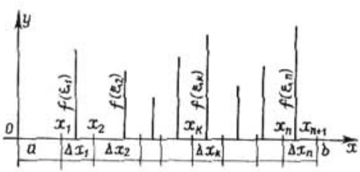


Fig. 138

1. La función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$. Dividamos el segmento $[a, b]$ por medio de puntos en n segmentos (es indiferente que sean iguales o desiguales), designemos las abscisas de los puntos por (fig. 138):
$x_1 = a,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots,\ x_{n+1}$, siendo $x_1 < x_2 < < x_3 < \ldots < x_{n+1} = b$.

Designemos las longitudes de los segmentos obtenidos por medio de $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_k, \ldots, \Delta x_n$, así pues,

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1,\ \Delta x_2 = x_3 - x_2,\ \ldots,\ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k,\ \ldots,$$
$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

2. En cada uno de los segmentos obtenidos $[x_k, x_{k+1}]$ se toma un punto arbitrario ξ_k, $x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1}$ y se calcula el valor de la función en este punto $f(\xi_k)$.

3. Hallemos el producto de este valor de la función $f(\xi_k)$ por la longitud del segmento Δx_k:

$$f(\xi_k)\cdot\Delta x_k.$$

4. Se suman todos los productos obtenidos:

$$f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_k)\cdot\Delta x_k + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n =$$
$$= \sum_a^b f(\xi)\,\Delta x.$$

En el símbolo $\sum\limits_a^b f(\xi)\,\Delta x$ la letra Σ significa la "suma" y $f(\xi)\,\Delta x$ indica que todos los sumandos son del mismo tipo: el producto de $f(\xi)$ por Δx, a y b *son el límite izquierdo* y derecho del segmento en el que se efectúan las operaciones de la suma. La suma formada de este modo $\sum\limits_a^b f(\xi)\,\Delta x$ se llama *suma integral*. Es evidente que se puede formar una suma integral mediante infinidad de procedimientos. Esto depende del procedimiento de división del segmento $[a, b]$ en n segmentos y de cómo se tomen los puntos ξ.

5. Consideremos que el número de partes n es variable y que se emplea tal procedimiento de división del segmento $[a, b]$, que para *cualquier número positivo dado* δ, *comenzando* desde cierto valor n, se cumplen las desigualdades:

$$\Delta x_1 < \delta,\ \Delta x_2 < \delta,\ \ldots,\ \Delta x_k < \delta,\ \ldots,\ \Delta x_n < \delta.$$

Es decir, todas $\Delta x \to 0$. Además, el número de segmentos n se hace mayor que cualquier número positivo $N = \frac{b-a}{\delta}$, o sea, $n \to \infty$. Cada producto $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ resulta en este caso una magnitud infinitamente pequeña, como producto de la magnitud acotada $f(\xi_k)$ por el infinitésimo Δx_k, y $\sum\limits_a^b f(\xi)\,\Delta x$ se convierte en una suma cuyo número de sumandos infinitésimos crece indefinidamente. En el teorema de existencia de la integral definida se demuestra que esta suma tiene límite. Este límite es la integral definida $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, es decir,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_a^b f(\xi)\,\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx.$$

2°. Ilustremos este teorema. AB (fig. 139) es la gráfica de la función $y=f(x)$, que es continua, positiva y creciente en el segmento $[a, b]$. Dividamos el segmento $[a, b]$ en n

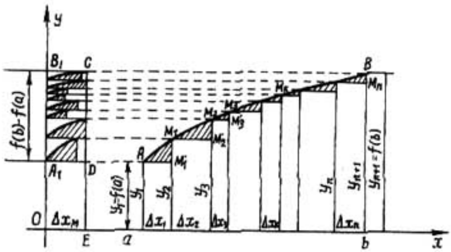


Fig. 139

partes (es indiferente que sean iguales o desiguales). Como punto ξ_k se toma en cada uno de los n segmentos su extremo izquierdo, es decir, x_k,

$$f(\xi_k)=f(x_k)=y_k,$$

y el producto

$$f(\xi_k)\cdot\Delta x_k=f(x_k)\cdot\Delta x_k,$$

es igual al área del rectángulo, cuya base es el segmento Δx_k, y la altura es la ordenada $f(x_k)$ de su extremo izquierdo. La suma integral:

$$\sum_a^b f(\xi)\,\Delta x=\sum_a^b f(x)\,\Delta x,$$

representa el valor del área de la figura escalonada $aAM'_1M_1M'_2M_2 \ldots M_nb$, que se forma por medio de estos rectángulos, sobre el segmento $[a, b]$.

El área del trapecio curvilíneo $aABb$ es igual a la suma de las áreas de los rectángulos, $\sum_a^b f(x)\,\Delta x$, más la suma de las áreas de los triángulos curvilíneos. Las áreas de estos triángulos aparecen rasgueadas en la figura 139. Designemos la suma de las áreas de los triángulos curvilíneos por medio de la letra σ. Entonces

$$S = \sum_a^b f(x)\cdot\Delta x + \sigma.$$

La suma $\sum_a^b f(x)\,\Delta x$ de las áreas de los rectángulos, al tender Δx a cero, es una magnitud variable, acotada, porque nunca se hará mayor que el área del rectángulo de base ab y de altura igual a la ordenada mayor bB, y *no es una* magnitud infinitésima, porque no puede ser menor que el área del rectángulo de la misma base ab y altura igual a aA.

Veamos cómo la suma σ de las áreas de los triángulos curvilíneos, cuando $\Delta x \to 0$, es una magnitud infinitésima.

Ocupémonos de un número determinado de divisiones. *Los segmentos Δx pueden ser de diferente longitud* (*algunos* pueden ser iguales) y entre ellos habrá, siquiera uno, que será el mayor (en la figura 139 hay dos Δx mayores), que *designaremos con el símbolo Δx_M. Coloquemos en el eje Ox*, empezando desde el origen O, un segmento igual a Δx_M, y construyamos en él, empleándolo de base, el rectángulo OB_1CE, *cuya altura sea igual a bB. De los puntos A, M_1, M_2, ... B* de la curva dada bajamos perpendiculares al eje Oy y trasladamos, siguiendo estas perpendiculares, los *triángulos curvilíneos AM'_1M_1, $M_1M'_2M_2$ ... de tal modo* que sus vértices A, M_1, M_2 ... se encuentren en el eje Oy. En este caso, todos los triángulos curvilíneos se colocan sin *superponerse, dentro del rectángulo A_1B_1CD, cuya base* es Δx_M, y su altura es $f(b) - f(a)$.

Una parte de la superficie del rectángulo A_1B_1CD queda *sin cubrir por las áreas de los triángulos curvilíneos. Por* eso, la suma σ de las áreas de los triángulos curvilíneos es menor que el área del rectángulo A_1B_1CD, o sea,

$$\sigma < [f(h) - f(a)]\cdot\Delta x_M.$$

La desigualdad obtenida se cumple para cada valor de n mientras se emplee el método de división de $[a, b]$ en segmentos, indicado en el teorema, y como en este caso todos los Δx (incluido Δx_M) se hacen magnitudes infinitésimas, también el producto de la constante $f(b) - f(a)$ por la infinitésima Δx_M resulta una magnitud infinitésima. Si $[f(b) - f(a)] \Delta x_M < \varepsilon$, entonces $\sigma < \varepsilon$, es decir, también σ es una magnitud infinitésima, que era lo que se trataba de demostrar. La igualdad

$$s = \sum_a^b f(x) \cdot \Delta x + \sigma$$

significa que *la constante S es igual a la variable* $\sum_a^b f(x) \cdot \Delta x$ más la infinitésima σ. Por lo tanto (§ 51)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x) \Delta x = S.$$

Pero (§ 125, fórmula XX)

$$S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

En consecuencia

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) \cdot dx} \qquad \text{(XXI)}$$

3°. Lo expuesto en el primer teorema es cierto para cualquier función continua $f(x)$, creciente o decreciente, o creciente en unos intervalos de variación del argumento y decreciente en otros, siendo indiferente si sus valores son positivos o son negativos.

§ 128. Propiedades de la integral definida

Considerando la integral definida $\sum_a^b f(x)\, dx$ como el límite de una suma de sumandos infinitésimos $f(x) \cdot \Delta x$ $(\Delta x \to 0)$, siendo ilimitadamente creciente el número de ellos, demostremos las propiedades de la integral definida.

1. *La integral definida de la suma algebraica de varias funciones es igual a la misma suma algebraica de las integrales definidas de los sumandos.*

En efecto, por ejemplo:

$$\int_a^b [f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]\,dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_a^b [f(x)+\varphi(x)-$$

$$-\psi(x)]\,\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_a^b f(x)\,\Delta x + \lim_{\Delta x\to 0} \sum_a^b \varphi(x)\,\Delta x -$$

$$-\lim_{\Delta x\to 0} \sum_a^b \psi(x)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

2. *El factor numérico de la función subintegral se puede sacar fuera del signo de la integral definida.*

Demostración.

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_a^b c\cdot f(x)\,\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0} c\cdot \sum_a^b f(x)\,\Delta x =$$

(porque c es factor común para todos los sumandos de la suma)

$$= c\cdot \lim_{\Delta x\to 0} \sum_a^b f(x)\,\Delta x = c\cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. *Al permutar los límites de integración, la integral definida cambia su signo por el contrario.*

Demostración. En el parágrafo anterior, al dividir el segmento $[a, b]$ en n partes se suponía que $a < b$. Supongamos que $b < a$ y que la división se efectúa desde el extremo a hacia b; en ese caso, todos los valores de Δx son negativos. (Si se divide $b - a$ en n partes iguales, por ejemplo, $\Delta x = \frac{b-a}{n} < 0$, puesto que $b - a < 0$).

Por eso, los sumandos $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ de las sumas $\sum_b^a f(\xi)\,\Delta x$ y $\sum_a^b f(\xi)\,\Delta x$, las propias sumas y sus límites $\int_b^a f(x)\,dx$

y $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ son de signo diferente, es decir

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

4. *La integral definida de la función $f(x)$ en el segmente $[a,\ b]$ es igual a la suma de las integrales definidas de esta función en todos los puntos del segmento.*

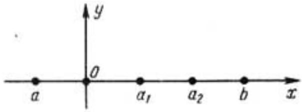


Fig. 140

Demonstración. Supongamos, por ejemplo, que el segmento $[a,\ b]$ está dividido por los puntos a_1 y a_2 en tres segmentos $(a < a_1 < a_2 < b)$ (fig. 140). Entonces la suma integral en el segmento $[a,\ b]$ es igual a la suma de las integrales en los segmentos $[a,\ a_1]$, $[a_1,\ a_2]$, $[a_2,\ b]$:

$$\sum_a^b f(x)\,\Delta x = \sum_a^{a_1} f(x)\,\Delta x + \sum_{a_1}^{a_2} f(x)\,\Delta x + \sum_{a_2}^{b} f(x)\,\Delta x.$$

Según el teorema § 53, la misma relación que hay entre las sumas, existe entre sus límites, es decir,

$$\int\limits_1^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{a_1} f(x)\,dx + \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \int\limits_{a_2}^{l} f(x)\,dx.$$

Esta propiedad se denomina *propiedad aditiva de la integral definida*.

5. Teorema del valor medio. Si una función $f(x)$ es continua en el segmento $[a,\ b]$, entre los valores de x en este segmento existe uno, $x = \xi$, tal que

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)} \qquad \text{(XXII)}$$

La demostración de este teorema sale de los límites de este curso. Si $f(x) \geqslant 0$, el teorema es geométricamente evidente (fig. 141): para un trapecio curvilíneo, formado por la curva $y = f(x)$, por el eje Ox y por las ordenadas $x = a$ y $x = b$, existe un rectángulo de igual superficie, cuya base es el segmento ab (su longitud es igual a $b - a$), su altura es la ordenada $f(\xi)$, situada entre el valor máximo y el mínimo de la función $f(x)$ en el segmento $[a, b]$.

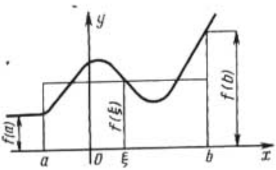


Fig. 141

$f(\xi)$ se llama *valor medio de la función $f(x)$ en el segmento* $[a, b]$. De la fórmula (XXII) resulta:

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx. \qquad \text{(XXIIa)}$$

§ 129. Cálculo de la integral definida

1°. El cálculo de la integral definida $f(x)\, dx$ se realiza aplicando la fórmula de Leibniz — Newton (XX).

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Esta fórmula es cierta si la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$, pero *para una función discontinua, la fórmula puede ser errónea.*

Ejemplo. Calcúlese $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Solución. Calculemos la integral indefinida por sustitución

$$x - 1 = u, \quad dx = du:$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \frac{u^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{1-x} + c.$$

Calculemos la integral definida:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left. \frac{1}{1-x} \right|_0^2 = \frac{1}{1-2} - \frac{1}{1-0} = -1 - 1 = -2.$$

El cálculo da el número negativo -2. Sin embargo, es evidente que todas las ordenadas de la curva $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ son positivas, porque el cuadrado de la diferencia $x-1$ es positivo para cualquier valor de x. La curva se encuentra encima del eje Ox y el área comprendida entre el eje Ox y esta curva no puede ser expresada por un número negativo. Se ha incurrido en un error: no se debía haber empleado la fórmula $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$, porque en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 2$ la función $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ es discontinua en el punto $x=1$ (fig. 142).

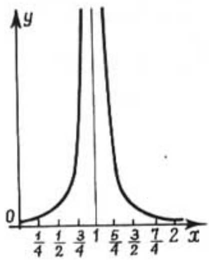


Fig. 142

2°. Sustitución de la variable. Al tomar la integral indefinida por la sustitución $\varphi(x)=u$, se obtiene una igualdad (§ 117)

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

siempre que $f(u)$ y $\varphi'(x)$ sean funciones continuas.

En el caso de la integral definida, se tiene la igualdad

$$\int\limits_a^b f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f(u)\,du, \qquad \text{(XXII)}$$

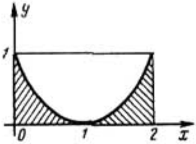
donde α y β son los valores de la función $u=\varphi(x)$ para $x=a$ y $x=b$, que no salen del segmento de continuidad de la función $f(u)$.

A veces, en la práctica de la integración hay que sustituir x por una función de u, $x=\varphi(u)$ (§ 120). La sustitución de $x=\varphi(u)$ no es posible si $\varphi(u)$ no puede ser igual a a y b.

Observación. Es menester que la función, mediante la cual transforma la integral, $u=\varphi(x)$ ó $x=\varphi(u)$, posea una función inversa, es decir, *que x y u estén en correspondencia biunívoca*. En caso de que la correspondencia entre x y u no sea biunívoca, la respuesta puede ser errónea.

Ejemplo 1. Calcular $\int\limits_0^2 (x-1)^2\,dx$.

S o l u c i ó n. Supongamos que $(x-1)^2=u$. Si $x=0$, se obtiene que $\alpha=(0-1)^2=1$, y si $x=2$, resulta que $\beta=(2-1)^2=1$, es decir, obtenemos que la integral tiene límites iguales, o sea, es igual a cero.



F i g. 143

Esta solución es muy pronta, pero errónea. En efecto, $\int\limits_0^2 (x-1)^2\,dx$ es el área, formada por la parábola $y=(x-1)^2$, por el eje Ox y por las ordenadas $x=0$ y $x=2$ (fig. 143), y que no es igual a cero. El error consiste en que no es posible aplicar la sustitución $(x-1)^2=u$, ya que por medio de esta igualdad x no se determina univocamente: $x=1\pm\sqrt{u}$.

El cálculo de este integral no exige la sustitución de la variable:

$$\int\limits_0^2 (x-1)^2\,dx=\int\limits_0^2 (x^2-2x+1)\,dx=\Big|_0^2\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right)=$$

$$=2\frac{2}{3}-4+2=\frac{2}{3}.$$

E j e m p l o 2. Calcular $\int\limits_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$.

S o l u c i ó n. Hagamos una sustitución de la variable, suponiendo que $2x-1=u$.

De aquí $x=\frac{u+1}{2}$, *la correspondencia entre* x *y* u *es biunívoca;* $dx=\frac{1}{2}\,du$.

Según los datos $a=1$, $b=5$, los límites de integración respecto a la nueva variable son:
el inferior: $\alpha=u(1)=2\cdot 1-1=1$; el superior; $\beta=u(5)=2\cdot 5-1=9$,

$$\int\limits_1^9 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{2}\int\limits_1^9 \frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int\limits_1^9 u^{-\frac{1}{2}}\,du=\Big|_1^9 u^{\frac{1}{2}}=\Big|_1^9\sqrt{u}=$$

$$=\sqrt{9}-\sqrt{1}=2.$$

Ejemplo 3. Calcular $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$.

Solución. Como $\cos^2 x = \frac{1+\cos^2 x}{2}$, se tiene:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\,dx.$$

Hagamos la sustitución de la variable: $u=2x$, $x=\frac{1}{2}u$, $dx=$ $=\frac{1}{2}du$. Los límites de integración respecto a u son: $\alpha=U(0)=$ $=2\cdot 0=0$, $\qquad \beta=u\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$.

Esto significa que

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} (1+\cos u)\,du = \frac{1}{4}\Big|_0^{\pi} (u+\operatorname{sen} u) =$$

$$=\frac{1}{4}\left[(\pi+\operatorname{sen}\pi)-(0+\operatorname{sen}0)\right]=\frac{1}{4}\pi.$$

Ejemplo 4. Calcular $\int\limits_0^{a} \sqrt{a^2-x^2\,dx}$.

Solución. Hagamos la sustitución de la variable $x=\alpha \operatorname{sen} u$ $dx=\alpha\cos u\,du$.
Para $\operatorname{sen} u$ existe la función inversa

$$u=\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \qquad (*)$$

Los límites de integración respecto a la nueva variable u se hallan aplicando la igualdad (*) y sustituyendo $x = 0$ y $x = a$. Obtenemos que:

$$\alpha=\operatorname{arcsen}\frac{o}{a}=\operatorname{arcsen}0=0,$$

$$\beta=\operatorname{arcsen}\frac{a}{}=\operatorname{arcsen}1=\frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto.

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2 \quad u a} \cos u\, du=$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 u}\cos u\ du=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du=\frac{\pi a^2}{4}$$

pues, según el ejemplo anterior $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du=\frac{\pi}{4}$.

Este integral es el área del cuarto del círculo de radio a (fig. 144). De aquí, el área del círculo de radio a es igual a $\frac{\pi a^2}{4}$.

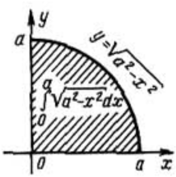


Fig. 144

3°. El cálculo por partes de la integral definida se hace aplicando la fórmula

$$\int_a^b u dv=\Big|_a^b uv-\int_a^b v du. \qquad \text{(XXIII)}$$

Esta puede obtenerse fácilmente. En efecto, haciendo

$$\int_b v\, du=\Phi_b(x)+C.$$

$$\int_a u\, dv=\Big|_a^b uv-\Phi(x)=\Big|_a^b uv-\Big|_a^b \Phi(x)=\Big|_a uv-\int_a^b v\, du.$$

Ejemplo 5°. Calcular $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$.

Solución. Tomemos la integral por partes, suponiendo que $u=\operatorname{arctg} x$, $dv=dx$. De aquí $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $v=x$.

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx=\Big|_0^1 x\operatorname{arctg} x-\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

La segunda integral se halla por la sustitución $t=1+x^2$, si notamos que $x\,dx=\frac{1}{2}\,dt$.

Según la integral dada $0\leqslant x\leqslant 1$. Sustituyendo en $t=1+x^2$, resulta:

$$\text{para}\quad x=0\qquad \alpha=t\,(0)=1+0=1,$$

$$\text{para}\quad x=1\qquad \beta=t\,(1)=1+1^2=2.$$

Indiquemos que, según la condición de unicidad, $x=+\sqrt{t-1}$. Así,

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx=\Big|_0^1\, x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{t}=\Big|_0^1\, x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\Big|_1^2\ln t=$$

$$=(1\cdot\operatorname{arctg} 1-0)-\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

§ 130. Ejemplos de cálculo de áreas. Area del segmento de la parábola. Area de la elipse

1°. Calcúlese el área del segmento OAB de la parábola $y^2=2px$ (fig. 145).

Solución. De la ecuación se obtiene:

$$y=\pm\sqrt{2px}.$$

Los valores positivos son los de los puntos de la curva situados encima del eje Ox, y negativos los que se encuentran debajo del eje Ox. Como la curva es simétrica respecto al eje Ox, es suficiente calcular el área correspondiente a la mitad del segmento y duplicar el resultado. Los límites de variación del argumento son desde 0 hasta x:

$$S_1=\int_0^x\sqrt{2px}\,dx=\sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{1}{2}}\,dx=$$

$$=\sqrt{2p}\,\Big|_0^x\,\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2p}\cdot x\cdot\sqrt{x}=\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{2px}.$$

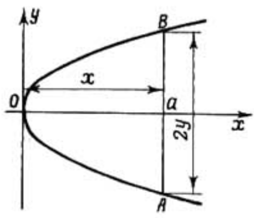


Fig. 145

Como según la condición $\sqrt{2px}=y$, se tiene $S_1=\frac{2}{3}x\cdot y$.

El área total del segmento $S=2S_1=2\cdot\frac{2}{3}x\cdot y$, $S=\frac{2}{3}x\cdot 2y$.

$2y$ es aquí la longitud de la cuerda del segmento, y x es la flecha.

Por lo tanto, *el área del segmento de una parábola, cortado por una cuerda cualquiera, perpendicular a su eje, es igual a dos tercios del área del rectángulo construido en esta cuerda y en su flecha.*

2°. Calcúlese el área limitada por la curva $y = 2 + x - x^2$ y el eje Ox.

Solución. Un área puede estar limitada por dos líneas solamente si se cortan estas líneas. Al resolver conjuntamente la ecuación

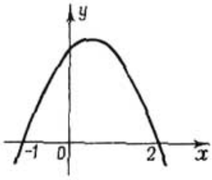


Fig. 146

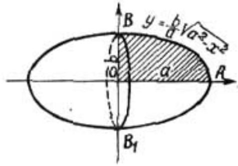


Fig. 147

de la curva, $y = 2 + x - x^2$, y del eje Ox, $y = 0$, obtenemos los puntos de intersección de éstas: $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$ (fig. 146).

Calculamos el área suponiendo en la fórmula (XX) que $a = -1$ y $b = 2$.

$$S = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\, dx = \Big|_{-1}^{+2} \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) =$$

$$= \left(2 \cdot 2 + \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 4\frac{1}{2}.$$

3°. Hállese el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Solución. Como la elipse es simétrica respecto a los ejes Ox y Oy, su área $S = 4$ áreas OAB (fig. 147).

De la ecuación de la elipse hallamos:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Delante de la raíz se coloca solamente el signo positivo, porque se ha tomado el arco de la elipse situado en el primer cuadrante, en el que los valores de y son positivos.

$$\text{El área } OAB = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{4}$$

(véase la solución de ejemplo 4, § 129)

El área total de la elipse $S=4\cdot\frac{\pi ab}{4}=\pi ab$.

Debe señalarse que la fórmula del área del círculo $s=\pi r^2$ constituye un caso particular de la fórmula hallada del área de la elipse al ser $a=b=r$.

4°. Hállese el área limitada por las líneas $y=x^3$ e $y=4x$.

S o l u c i ó n. Determinamos en primer lugar los límites del área, para lo cual resolvemos conjuntamente las ecuaciones dadas:

$$x^3-4x=0, \quad x(x^2-4)=0, \quad x_1=-2, \quad x_2=0 \ \text{ y } \ x_3=2.$$

Tracemos la parábola siguiendo los puntos:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2$
y	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$+\frac{1}{8}$	$+1$	$+8$

y tracemos por los puntos $(-2;\ -8)$ y $(2;\ 8)$ una recta (Fig. 148).

Es necesario determinar el área rasgueada que se compone de dos partes iguales entre sí. Determinamos el área $OABD$ como la diferencia de las áreas del triángulo rectilíneo $OABC$ y del triángulo curvilíneo $ODBC$.

$$\text{El área } OABC=\int_0^2 4x\,dx=\Big|_0^2\ 2x^2=8.$$

$$\text{El área } ODBC=\int_0^2 x^3\,dx=\Big|_0^2\ \frac{x^4}{4}=4.$$

El área $OABD=8-4=4$; el área buscada: 8 unidades cuadradas.

5°. Calcular el área limitada por las líneas

$$y^2=2x+1 \tag{1}$$

$$y=x-1. \tag{2}$$

S o l u c i ó n. Hallamos los puntos de intersección de las líneas: para esto, sustituimos el valor de y de la ecuación (2) en la ecuación (1) y obtenemos:

$$(x-1)^2=2x+1; \quad x^2-4x=0; \quad x_1=0, \quad x_2=4,$$

y poniendo estos valores de x en la ecuación (2), obtenemos dos puntos de intersección: $A\ (0;\ -1)$ y $B\ (4;\ 3)$.

Transformando la ecuación (1) en la forma:

$$(y-0)^2=2\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

determinamos el vértice de la parábola: $0\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$.

Trazamos las líneas dadas en el segmento $\left[-\frac{1}{2}\,;\,4\right]$ (fig. 149). El área buscada S es la rayada.

$$S = \text{área } O'BC + \text{área } O'AC = \text{área } O'BD - \text{área } CBD +$$
$$+ \text{área } O'AO + \text{área } AOC.$$

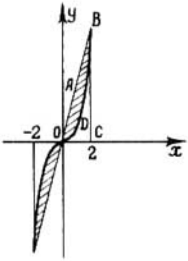


Fig. 148

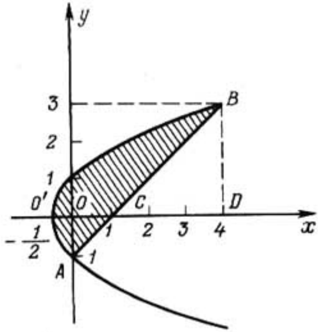


Fig. 149

Cada una de estas áreas se calcula por la fórmula

$$S = \int_a^b y\,dx.$$

Para las áreas OBD y $O'AO$, y se determina de la ecuación (1):

$$y = \pm\sqrt{2x+1},$$

al mismo tiempo se toma el signo $+$ para las ordenadas del arco $O'B$, que se encuentra situado encima del eje OX, y el $-$ para las del arco $O'A$, situado debajo del OX.

Para las áreas CBD y AOC, y se toma de la ecuación (2)

$$\text{área } O'BD = \int_{-\frac{1}{2}}^{4} \sqrt[4]{2x+2}\,dx.$$

Suponiendo que $2x+1=u$, tenemos $dx = \frac{1}{2}\,du$, $\alpha = u\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $\beta = u\,(4) = 9$.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4} \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^9 \sqrt{4}\,du = \frac{1}{3}\Big|_0^9 \sqrt{4^3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{9^3} - \sqrt{0}\right) = 9$$

$$\text{Area } CBD=\int_1^4 (x-1)\,dx=\Big|_1^4\left(\frac{x^2}{2}-x\right)=4-\left(-\frac{1}{2}\right)=4\frac{1}{2}\,.$$

Las áreas $O'AO$ y AOC están situadas debajo del eje Ox, por lo que sus integrales son números negativos. Hay que tomar su magnitud absoluta, para lo que es suficiente tomar las integrales con signo opuesto.

$$\text{Area } O'AO=\int_{-\frac{1}{2}}^{0} (-\sqrt{2x+1})\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{2x+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,du=\frac{1}{3}\Big|_0^1\sqrt{u^3}=\frac{1}{3}\,.$$

$$\text{Area } AOC=-\int_0^1 (x-1)\,dx=-\Big|_0^1\left(\frac{x^2}{2}-x\right)=-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,.$$

Por lo tanto, el área buscada

$$S=9-4\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=5\frac{1}{3}\text{ (unidades cuadradas).}$$

§ 131. Volumen de una pirámide

En calidad de ejemplo de aplicación de la integral definida, como límite de una suma, calculemos el volumen v de una pirámide triangular (efectuando las operaciones indicadas en el punto 1° del § 127), siendo el área de la base igual a S unidades cuadradas, y la altura, igual a h unidades lineales.

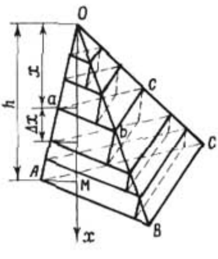


Fig. 150

Dividamos la altura de la pirámide $OM=h$ (fig. 150) en n segmentos (es indiferente que sean iguales o desiguales): $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Por los puntos obtenidos se trazan planos paralelos a la base de la pirámide. Las áreas de los polígonos de la sección obtenida s y de la base de la pirámide S son proporcionales a los cuadrados de sus distancias desde el vértice de la pirámide.

Designando la distancia desde el vértice hasta la sección examinada *abc* por medio de x, se tiene:

$$\frac{s}{S}=\frac{x^2}{h^2}\,; \quad s=\frac{S}{h^2}\,x^2.$$

Así pues, el área s es una función continua de x, determinada en el segmento $[0,\ h]$:

$$s=f\,(x)=\frac{S}{h^2}\,x^2.$$

Construyamos en cada polígono de la sección un prisma cuya altura sea Δx, de tal modo que sus aristas laterales sean paralelas a la arista OA, y el polígono de la sección sea la base *superior* del prisma. El conjunto de estos prismas constituye un cuerpo escalonado, contenido enteramente en la pirámide.

El volumen de cada prisma es igual al producto del área de la sección $f\,(x)$ por la altura del prisma Δx:

$$f\,(x)\cdot\Delta x=\frac{S}{h^2}\,x^2\cdot\Delta x.$$

El volumen del cuerpo escalonado, que está formado por los prismas construidos, es una suma integral:

$$\sum_{0}^{h} f\,(x)\cdot\Delta x=\sum_{0}^{h}\frac{S}{h^2}\cdot x^2\Delta x.$$

El volumen de la pirámide es el límite de esta suma integral si $\Delta x\to 0$:

$$v=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{0}^{h}\frac{S}{h^2}\,x^2\Delta x=\int_{0}^{h}\frac{S}{h^2}\,x^2\,dx=\frac{s}{h^2}\int_{0}^{h}x^2\,dx=$$

$$=\frac{S}{h^2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{h}=\frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}\,S\cdot h,$$

es decir, ***el volumen de una pirámide (triangular) es igual a un tercio del producto del área de la base por su altura.***

§ 132. Volumen de un cuerpo de revolución

1°. En la figura 151, la línea $aABb$ está formada por el arco AB de una función continua $y=f\,(x)$, por las ordenadas de los puntos A y B y el segmento del eje Ox, limitado

por estas ordenadas. Haciendo girar la línea $aABb$ alrededor del eje Ox, se obtiene la superficie de revolución ABB_1A_1; el cuerpo limitado por ella entre los círculos AA_1 y BB_1 se llama cuerpo de revolución. Hallemos su volumen. Se construye para el área $aABb$ un sistema de rectángulos (§ 127,

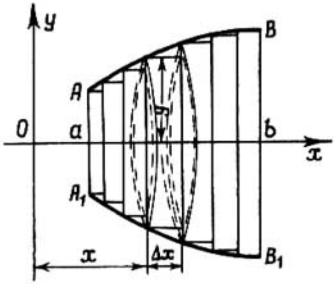


Fig. 151

2°). Al girar alrededor del eje Ox, los rectángulos forman cilindros. El conjunto de estos cilindros constituye un cuerpo escalonado. El volumen de cada cilindro es igual a $\pi y^2 \Delta x$, y el volumen de todo el cuerpo escalonado es:

$$\sum_a^b \pi y^2 \Delta x.$$

Aquí, πy^2 es una función continua de x, porque según la condición, la función $y = f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$

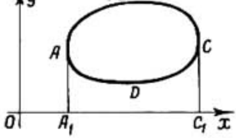


Fig. 152

(§ 71, 4°), y, por lo tanto la suma integral $\sum_a^b \pi y^2 \Delta x$ tiene límite para $\Delta x \to 0$ (§ 127, 1°). Este límite es el volumen del cuerpo de revolución v:

$$v = \lim \sum_a^b \pi y^2 \Delta x = \int_a^b \pi y^2 \, dx = \pi \int_a^b y^2 \, dx.$$

Por lo tanto, el volumen de un cuerpo de revolución:

$$\boxed{v=\pi\int_a^b y^2\,dx \text{ o } v=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx} \qquad \text{(XXIV)}$$

2°. Si gira una curva cerrada (fig. 152), por ejemplo, $ABCD$, el volumen buscado es igual a la diferencia de los volúmenes obtenidos al girar los trapecios curvilíneos A_1ABCC_1 y A_1ADCC_1.

Designando por medio de y_1 la coordenada variable de la parte superior de la curva (ABC), y por y_2 la ordenada variable de su parte inferior (ADC), se obtiene:

$$\boxed{v=\pi\int_a^b (y_1^2-y_2^2)\,dx} \qquad \text{(XXV)}$$

§ 133. Ejemplos de cálculo de volúmenes *de cuerpos de revolución*

1°. Volumen de un cono circular recto. Se obtiene un cono circular recto, cuya altura sea h y el radio r, al girar el triángulo rectangular OAB (fig. 153), cuyos catetos son iguales a h y r, alrededor del cateto OA, que es igual a h.

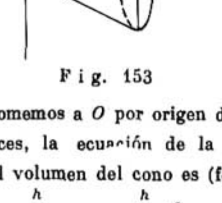


Fig. 153

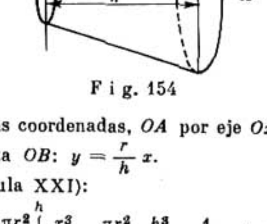


Fig. 154

Tomemos a O por origen de las coordenadas, OA por eje Ox. Entonces, la ecuación de la recta OB: $y=\frac{r}{h}x$.

El volumen del cono es (fórmula XXI):

$$v=\pi\int_0^h y^2\,dx=\pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\,dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\Big|_0^h\frac{x^3}{3}=\frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h.$$

Como πr^2 es el área de la base del cono, *el volumen de un cono es igual a un tercio del producto del área de la base por su altura.*

2°. Volumen de un cono truncado.

Se obtiene un cono truncado, cuya altura sea h y los radios de las bases r y R, al girar el trapecio rectangular $OABC$ (fig. 154) alrededor de OC como si fuera su eje. Colocando los ejes de las coordenadas, según se indica en la figura 154, se forma la ecuación de la recta AB:

$$y=\frac{R-r}{h}x+r.$$

El volumen del cono truncado (fórmula XXIV)

$$v=\pi\int_0^h\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2 dx.$$

Suponiendo $\frac{R-r}{h}x+r=u$, se tiene: $\frac{h}{R-r}\,du$,

$$\text{para } x=0 \qquad \alpha=u(0)=r,$$
$$\text{para } x=h \qquad \beta=u(h)=R.$$

$$\pi\int_0^h\left(\frac{R-r}{h}x+r\right)^2 dx=\frac{\pi h}{R-r}\int_r^R u^2\,du=\frac{\pi h}{R-r}\Big|_r^R\frac{u^3}{3}=$$
$$=\frac{1}{3}\frac{\pi h}{R-r}(R^3-r^3)=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2).$$

Abriendo los paréntesis, el volumen aparece así:

$$v=\frac{1}{3}\pi R^2h+\frac{1}{3}\pi r^2h+\frac{1}{3}\pi Rrh, \text{ es decir,}$$

el volumen de un cono truncado es igual a la suma de los volúmenes de tres conos, con la misma altura que el cono truncado y cuyas bases son: para el primero, la base inferior de este cono; para el segundo, la base superior, y para el tercero, un círculo cuya área sea la media geométrica de las áreas de las bases superior e inferior.

3°. Volumen de una esfera. Se obtiene una esfera de radio r al girar el círculo $x^2+y^2=r^2$ alrededor del eje Ox (fig. 155). Por lo tanto (fórmula XXIV):

$$v=\pi\int_{-r}^{+r}y^2\,dx=2\pi\int_0^{+r}(r^2-x^2)\,dx=2\pi\Big|_0^r\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)=$$
$$=2\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^2.$$

Presentando $\frac{4}{3}\pi r^3$ en la forma $4\pi r^2\cdot\frac{1}{3}r$, se obtiene que: *el volumen de una esfera es igual al producto del cuádruplo del área de su círculo mayor por un tercio del radio.*

4°. Volumen de un segmento esférico.
La parte de la esfera ACA_1 (fig. 156), que separa de ella cierto plano AA_1, se llama segmento esférico. Es evidente que un segmento esférico puede ser considerado como un cuerpo de revolución resul-

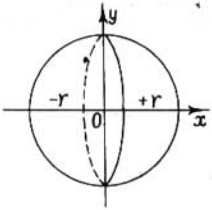


Fig. 155

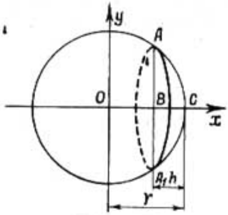


Fig. 156

tante de la rotación del segmento circular ABA_1C alrededor de su altura BC. Supongamos que se conoce el radio del círculo r y la altura del segmento h.

El volumen del segmento esférico:

$$v=\pi\int_{r-h}^{r} y^2\,dx=\pi\int_{r-h}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\Big|_{r-h}^{r}\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)=$$

$$=\pi\left\{\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\left[r^2(r-h)-\frac{(r-h)^3}{3}\right]\right\}=\pi h^2\left(r-\frac{1}{3}h\right).$$

Se puede considerar πh^2 como el área del círculo de radio h, y $r-\frac{1}{3}h$ como la altura. Por lo tanto, *el volumen de un segmento esférico es igual al volumen de un cilindro, en el que la base es igual a la altura del segmento, y la altura es igual al radio de la esfera disminuido en un tercio de la altura del segmento.*

§ 134. Presión de un líquido

1°. En calidad de ejemplo de cálculo de valores de magnitudes como límite de la suma de infinitésimos, examinemos también la determinación de la presión de un líquido y el trabajo producido por una fuerza.

Es sabido que la fuerza de la presión de un líquido sobre una superficie de un plano horizontal de S unidades cuadradas es igual al peso de la columna de líquido que tenga de base esta superficie, y de altura, la profundidad de inmersión a partir de la superficie del líquido. Designando el peso específico del líquido por medio de la letra γ, y la altura de la columna por medio de la letra h, se halla que la fuerza de presión del líquido sobre la superficie de S unidades cuadradas es

$$P=\gamma \cdot h \cdot S.$$

Dada la superficie S, la fuerza de la presión del líquido es una función de la profundidad h. Supongamos que $aABb$ (fig. 157) es una parte de una pared vertical, por ejemplo de una piscina llena de líquido. Para determinar la fuerza de la presión sobre la superficie $aABb$, se divide ab en n partes, y se designa la longitud de los segmentos obtenidos con Δh. Se construye un rectángulo en cada segmento Δh, como si fuera su base. Se toma uno de los rectángulos $kKLl$, designando su superficie con ΔS y se considera que su límite superior kK se encuentra a la profundidad h, a partir de la superficie del líquido. Supongamos que este rectángulo $kKLl$ está a la profundidad h y que no es vertical, sino horizontal; en este caso soportará una presión igual a

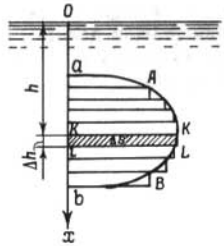


Fig. 157

$$\gamma h \Delta S.$$

Es sabido que la presión del líquido en cada uno de sus puntos es igual en todas las direcciones. Por lo tanto, si se vuelve a presentar el rectángulo $kKLl$ vertical, la presión ejercida sobre él será algo mayor que cuando se encontraba horizontalmente, porque la presión es algo mayor en su límite inferior lL que en el límite superior kK.

Admitamos que la presión a lo largo de toda la altura Δh es exactamente igual que en el límite kK, con lo que la fuerza de la presión sobre el rectángulo será igual a

$$\gamma \cdot h \Delta S.$$

El área del rectángulo $kKLl$ $\Delta S=kK \cdot \Delta h$. El valor de kK cambia al variar la profundidad h de inmersión de kK, es decir, kK es función de h:

$$kK=f(h).$$

Es evidente que kK es una función continua en el segmento $[a, b]$. En consecuencia, en el producto

$$\gamma \cdot h \cdot \Delta S = \gamma \cdot h \cdot f(h) \cdot \Delta h$$

la función $\gamma \cdot h \cdot f(h)$ es continua, y la suma integral

$$\sum_{a}^{b} \gamma h \Delta S$$

tiene límite cuando $\Delta h \to 0$. Este límite es el que representa la presión del líquido sobre toda la superficie S.

Por lo tanto, la presión sobre toda la superficie de la pared $aABb$:

$$\boxed{P = \lim_{\Delta h \to 0} \sum_{a}^{b} \gamma \cdot h \cdot \Delta S = \gamma \int_{a}^{b} h\, dS.} \qquad \text{(XXVI)}$$

Aquí sirve de variable independiente la profundidad de inmersión h, por lo que antes de comenzar la integración es necesario expresar por medio de h y Δh el área del rectángulo dS; sirven de límites de integración los límites inferior y superior de la superficie en la que se determina la presión.

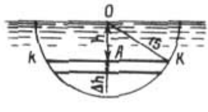


Fig. 158

2°. Ejemplo. Un tragaluz circular de 30 centímetros de diámetro, de la banda de una embarcación, está sumergido en el agua hasta la mitad. Hállese la presión que ejerce el agua en la parte sumergida (fig. 158).

Solución. Se determina la presión por medio de la fórmula la (XXVI):

$$P = \gamma \int_{a}^{b} h\, dS.$$

El área $dS = kK \cdot dh$.

Del triángulo AOK hallamos que $kK = 2\sqrt{15^2 - h^2} = 2\sqrt{225 - h^2}$, y, en consecuencia, $dS = 2\sqrt{225 - h^2}\, dh$.

Para el agua $\gamma = 1$ gramo. Los límites de integración $a = 0$, $b = 15$. Por lo tanto, $P = 2\int_{0}^{15} h\sqrt{225 - h^2} \cdot dh$.

La integral indefinida $\int h \cdot \sqrt{225 - h^2}\, dh$ se calcula por medio de la sustitución $225 - h^2 = u^2$, $\quad 2h\, dh = 2u\, du$, $h\, dh = -u\, du$.

Por la condición de unicidad entre h y u $(0 \leqslant h \leqslant 15)$

$$u = \sqrt{225 - h^2}.$$

Los límites de integración respecto a u son:

$$\alpha = u(0) = 15, \qquad \beta = u(15) = 0.$$

Se obtiene:

$$2\int_0^{15} h\sqrt{225-h^2}\,dh = -2\int_{15}^{0} u^2\,du = \frac{2}{3}\Big|_0^{15} u^3 = \frac{2}{3}\cdot 15^3 = 2\,250;$$

$$P = 2\,250g.$$

§ 135. Trabajo producido por una fuerza

1°. Si la fuerza es constante, su valor numérico es idéntico en todos los puntos de la trayectoria; pero si varía la fuerza, su valor numérico suele ser diferente en los diversos puntos de ella; es decir, a cada valor de distancia recorrida corresponde un valor determinado de la fuerza que actúa F. Por lo tanto, la fuerza F puede considerarse como una función de la distancia recorrida s:

$$F = f(s).$$

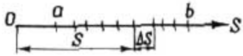


Fig. 159

Examinemos solamente la variación continua de la fuerza, es decir, admitamos a $f(s)$ como función continua de la distancia s y consideremos que la dirección de la fuerza coincide con la dirección del movimiento.

Para determinar el trabajo producido por una fuerza variable F en el segmento de la trayectoria rectilínea ab (fig. 159), se divide $[a, b]$ en un gran número de partes n, y la longitud de cada uno de los segmentos obtenidos se designa por medio de Δs.

El valor de la fuerza en el origen de cada segmento de la trayectoria Δs es igual a $f(s)$, donde s es el valor de la distancia recorrida hasta el origen del segmento en cuestión.

Supongamos que el valor de la fuerza $f(s)$ varía solamente en el origen de cada uno de los segmentos obtenidos Δs y que a todo lo largo de Δs permanece invariable. En ese caso, el trabajo de la fuerza constante $f(s)$ a lo largo de la trayectoria Δs se expresa por medio del producto $f(s)\cdot\Delta s$. Esto es conocido de la física. Es evidente que este producto (denominado generalmente trabajo elemental) se diferencia del valor real del trabajo en el segmento Δs, y la suma $\sum_a^b f(s) \cdot \Delta s$ se diferencia del trabajo real en el segmento $[a, b]$.

Como $f(s)$ es una función continua en el segmento $[a, b]$, la suma integral $\sum_a^b f(s) \cdot \Delta s$ tiene límite al tender Δs a cero:

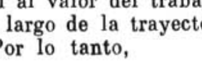
$$\lim_{\Delta s \to 0} \sum_a^b f(s) \cdot \Delta s,$$

igual al valor del trabajo w, producido por la fuerza $f(s)$ a lo largo de la trayectoria ab.

Por lo tanto,

$$\boxed{w = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_a^b f(s) \cdot \Delta s = \int_a^b f(s)\, ds} \qquad \text{(XXVII)}$$

2°. E j e m p l o. 1. Dos cargas eléctricas: $e_1 = +100$ unidades electrostáticas y $e_2 = +50$ unidades electrostáticas están inmóviles, a la distancia de 10 centímetros la una de la otra. ¿Cuál es el trabajo



F i g. 160

F i g. 161

que producirá la fuerza de empuje de las cargas si la carga e_2, es desplazada a una distancia de 50 centímetros de la carga e (fig. 160)?

S o l u c i ó n. La fuerza de empuje F, que actúa sobre la carga e_2 que se desplaza, se determina por medio de la ley de Coulomb:

$$F = \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2} = \frac{100 \cdot 50}{r^2} = \frac{5\,000}{r^2},$$

donde r es la distancia entre las cargas, expresada en centímetros. La fuerza F no permanece constante, sino que disminuye continuamente al alejarse la carga e_2, ès decir, en realidad es una función del espacio recorrido durante el movimiento, según hemos admitido en el caso general.

Los límites de la variación de la variable independiente r son: la distancia inicial entre las cargas, 10 centímetros, y la final, 50 centímetros. Según la fórmula (XXVII), el trabajo producido por la fuerza de empuje:

$$w = \int_{10}^{50} \frac{5\,000}{r^2}\, dr = -5\,000\left(\frac{1}{50} - \frac{1}{10}\right) = 400 \text{ (ergios).}$$

3°. E j e m p l o. 2. Se ha encerrado un gas en un cilindro con émbolo móvil, cuya superficie transversal es a unidades cuadradas. Considerando que al aumentar el volumen del gas subsiste la ley de Boyle-Mariotte $p \cdot v = k$, calcúlese el trabajo producido por la fuerza de presión del gas al aumentar su volumen desde v_0 hasta v_1 (fig. 161).

S o l u c i ó n. Se designa con v el volumen del gas en el cilindro, y con p la presión que actúa sobre una unidad de superficie del émbolo. Como la superficie del émbolo es igual a a unidades, la fuerza de presión del gas sobre ésta es igual a $p \cdot a$. Supongamos que al aumentar el volumen desde v_0 hasta v_1, el émbolo recorre el trayecto $s = s_1 - s_0$ con lo que el trabajo de la fuerza de presión del gas, según la fórmula (XXVII):

$$w = \int_{s_0}^{s_1} p \cdot a \cdot ds.$$

Debe tenerse en cuenta que la presión p es aquí una magnitud variable y depende del valor del volumen v, precisamente $p = \frac{k}{v}$. Expresemos ds como función de v. Supongamos que el émbolo se ha desplazado en ds, en tanto que el volumen del gas ha aumentado en dv. Entonces

$$dv = a \cdot ds \quad \text{y} \quad ds = \frac{dv}{a}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos de p y ds en la integral y reemplazando dos límites de variación de s por los correspondientes límites de variación de v, se tiene:

$$w = \int_{s_0}^{s_1} p \cdot a \cdot ds = \int_{v_0}^{v_1} \frac{k}{v}\, a \cdot \frac{dv}{a} = k \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{v} = k \ln \frac{v_1}{v_0}.$$

CAPITULO XII

ECUACIONES DIFERENCIALES

§ 136. Concepto de ecuaciones diferenciales y sus soluciones

1°. En una ecuación diferencial ordinaria, la incógnita es una función de un argumento.

Existen las siguientes **d e f i n i c i o n e s**:

1. *Se llama ecuación diferencial ordinaria de primer orden a una igualdad que relaciona la función desconocida con su argumento y su derivada.*

Su forma general se expresa por el símbolo

$$F(x, y, y) = 0,$$

donde y es la función desconocida con argumento x.

En particular, la ecuación de primer orden puede ser representada en forma explícita respecto a la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

2. *Se llama ecuación diferencial ordinaria de segundo orden a una igualdad que relaciona la función desconocida con su argumento y sus derivadas de segundo y primero órdenes.*

Su forma general se denota con el símbolo $F(x, y, y', y'') = 0$, en particular: $\frac{d^2x}{dx^2} = f(x, y, y')$, donde y es una función desconocida de x.

3. En general, *se llama ecuación diferencial ordinaria a una igualdad que relaciona la función desconocida con su argumento y con sus derivadas desde el primer orden hasta el orden n (inclusive).*

4. *Se llama orden de la ecuación diferencial al orden de la derivada de mayor grado que figura en esta ecuación.*

E j e m p l o s. Son ecuaciones diferenciales ordinarias:

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$, de primer orden;

2) $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=x$, de segundo orden;

3) $\frac{d^3y}{dx^3}-xe^x=0$, de tercer orden.

La tercera ecuación no contiene y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, sin embargo, es de tercer orden, ya que su derivada de mayor grado es de tercer orden.

En el análisis se estudian, además de las ecuaciones ordinarias (es decir, las ecuaciones con una función incógnita de un argumento), las ecuaciones diferenciales de varios argumentos. Como se estudiarán sólo las ecuaciones diferenciales ordinarias, para abreviar la escritura se omitirá la palabra "ordinaria", es decir, diremos sencillamente ecuación diferencial.

2°. Definición 5. *Se llama solución de la ecuación diferencial a una función, cuya sustitución en la ecuación conduce a una identidad.* En otras palabras, *se llama solución de la ecuación diferencial a una función que satisface a esta ecuación.*

Por ejemplo, la función $y=\sqrt{x}$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x} \quad 1)$$

(ejemplo 1), ya que sustituyéndola en la ecuación se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sqrt{x}}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}};\qquad \frac{y}{2x}=\frac{\sqrt{x}}{2x}=\frac{1}{2\sqrt{x}};\qquad \frac{1}{2\sqrt{x}}\equiv\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

($\equiv$ significa que es idénticamente igual).

Indiquemos que cualquier función $y=\sqrt{Cx}$, donde C es una constante arbitraria, es una función diferencial 1).

En efecto, sustituyendo y por $\sqrt{Cx}$ en la ecuación 1), resulta: $\frac{dy}{dx}=\frac{d\sqrt{Cx}}{dx}=\frac{C}{2\sqrt{Cx}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{x}}=\frac{1}{2x}\sqrt{Cx}=\frac{1}{2x}y=$
$=\frac{y}{2x};\ \frac{y}{2x}\equiv\frac{y}{2x}.$

Como se ve, la ecuación diferencial de primer orden tiene* un conjunto infinito de soluciones que depende de una constante arbitraria C.

* En general, bajo ciertas condiciones determinadas.

La ecuación de segundo orden tiene * un conjunto infinito de soluciones que depende de dos constantes independientes arbitrarias C_1 y C_2**. Aclaremos esto con un ejemplo.

E j e m p l o 4. Hallar la solución de la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} = x$.

S o l u c i ó n. Supongamos que $\frac{dy}{dx} = z$. Entonces $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$, y esta ecuación toma la forma siguiente: $\frac{dz}{dx} = x$. De aquí:

$$dz = x\,dx; \qquad z = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C_1,$$

o sea, para $z = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 + C_1.$$

Por lo tanto

$$dy = \frac{1}{2}x^2\,dx + C_1\,dx;$$

$$y = \frac{1}{2}\int x^2\,dx + C_1\int dx = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2;$$

$$y = \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2.$$

De este modo, para la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} = x$ existe un conjunto infinito de soluciones que depende de dos constantes arbitrarias C_1 y C_2, independientes entre sí.

D e f i n i c i ó n 6. *La solución de la ecuación diferencial, que contiene una cantidad de constantes independientes arbitrarias igual al orden de la ecuación, se llama solución general de la ecuación diferencial.****

Según la definición, la solución general de la ecuación diferencial de primer orden $y = \varphi(x, C)$ es una familia de funciones de x, que depende de una constante arbitraria C;

* En general, bajo ciertas condiciones determinadas.

** «Independientes» significa que la introdución de nuevas constantes no puede disminuir su número.

*** Más adelante se tratará sobre la propiedad que determina la solución general.

la solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$y = \varphi(x_1 C_1, C_2)$$

es una familia de funciones de x, dependiente de dos constantes arbitrarias independientes C_1 y C_2; etc.

Definición 7. *Toda solución obtenida de la solución general, sustituyendo las constantes arbitrarias por valores determinados, se llama solución particular de la ecuación diferencial.*

Para la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$ la solución general es $y = \sqrt{Cx}$, y una solución particular, $y = \sqrt{x}$. La última se obtiene de la general, si $C = 1$.

Para la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} = x$ la solución general es $y = \frac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2$. Si se hace en la solución general, por ejemplo, $C_1 = 1$, y $C_2 = -3$, se obtiene la solución particular: $y = \frac{1}{6}x^3 + x - 3$.

Algunas ecuaciones diferenciales tienen las soluciones singulares.

Definición 8. *Se llaman soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales de primer orden a soluciones que no contienen constante arbitraria, y no pueden ser obtenidas de la solución general bajo ningún valor de la constante arbitraria.*

Ejemplo 5. Hallar la solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$.

Solución. Suponiendo que $1 - y^2 \neq 0$, dividimos la ecuación por $\sqrt{1 - y^2}$ y multiplicamos por dx:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx.$$

El primer miembro es la diferencial de arc sen y; por lo tanto se tiene: $d \operatorname{arc\,sen} y = dx$; $\int d \operatorname{arc\,sen} y = \int dx$, $\operatorname{arc\,sen} y = x + C$.

De aquí

$$y = \operatorname{sen}(x + C).$$

Esta es la solución general de la ecuación dada. En efecto, sustituyendo y por $\operatorname{sen}(x+C)$ en la ecuación dada, resulta:

$$\frac{dy}{dx}=[\operatorname{sen}(x+C)]'=\cos(x+C)=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x+C)}\ .$$

Como $\operatorname{sen}^2(x+C)=y^2$,

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2};\quad \sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-y^2}.$$

Hemos hallado así la solución general de la ecuación, si $1-y^2\neq 0$.

Supongamos ahora que $1-y^2=0$. En este caso, $y=\pm 1$.

La sustitución de estas funciones en la ecuación dada conduce a la identidad

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\pm 1)}{dx}=0;\quad \sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-(\pm 1)^2}=0;\quad 0\equiv 0.$$

Por consiguiente, $y=1$ e $y=-1$ son soluciones de la ecuación diferencial dada. Sin embargo, éstas no se obtienen de la solución general $y=\operatorname{sen}(x+C)$ bajo ningún valor de la constante arbitraria C. Según la definición 8, $y=1$ e $y=-1$ son soluciones singulares de la ecuación dada.

§ 137. Ecuación $\frac{dy}{dx}f(x, y)$ y su solución; interpretación geométrica

1°. **Noción sobre función de dos argumentos.** Si a cada par de números, valores de las magnitudes x e y, le corresponde un número único, que es el valor de la tercera magnitud u, esta tercera magnitud u se llama *función de dos argumentos x e y*.

El hecho de ser u una función determinada de dos argumentos x e y, se representa así:

$$u=f(x, y),$$

donde f es una ley según la cual a cada par de números x e y le corresponde el número u.

Supongamos que x_0, y_0 son números dados. El símbolo $f(x_0, y_0)$ significa el valor de la función cuando $x=x_0$ e $y=y_0$.

2°. Ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Consideremos que la ecuación diferencial ordinaria de primer orden está expresada en la forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x, y).} \tag{I}$$

Según esta ecuación *la derivada* $\frac{dy}{dx}$ *es una función dada de dos argumentos* x *e* y.

Si x e y se consideran como abscisa y ordenada de un punto en el plano de coordenadas xOy, según esta ecuación *la derivada* $\frac{dy}{dx}$ *es una función dada del punto* (x, y) *del plano* xOy.

3°. Solución de la ecuación (I). La solución general de la ecuación (I)

$$y = \varphi(x, C)$$

posee la siguiente propiedad que la determina:

tomando los valores arbitrarios $x = x_0$ e $y = y_0$*, la ecuación $y_0 = \varphi(x_0, C)$ tiene una solución única $C = C_0$, para la cual $y = \varphi(x, C)$ da la función $y = \varphi(x, C_0)$ que satisface la condición $y = y_0$, si $x = x_0$, y la ecuación dada $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Esta función $y = \varphi(x, C_0)$ existe y es única en un entorno del punto $x = x_0$**.

Los números x_0, y_0 se llaman *valores iniciales* o *punto inicial de la solución de la ecuación*, y la función $y = \varphi(x, C_0)$ se denomina *solución de la ecuación* (1) *con el punto inicial* (x_0, y_0).

Ejemplo. La ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$ tiene la solución general $y = \sqrt{Cx}$. Tomemos arbitrariamente valores de x e y, por ejemplo, $x = -2$, $y = 3$. Sustituyendo estos valores en $y = \sqrt{Cx}$, se obtiene la ecuación respecto a C:

$$3 = \sqrt{-2C}.$$

* Estos valores, como se explica en los cursos superiores de análisis, deben pertenecer al dominio de continuidad de la función $f(x, y)$ y de su derivada (parcial) respecto a y.

** Esto se demuestra en los cursos superiores de análisis.

Resolviendo esta ecuación, obtenemos el valor único $C = C_0$:

$$9 = -2C_0, \qquad C_0 = -4,5,$$

y la función

$$y = \sqrt{-4,5x}$$

es la solución (particular) de la ecuación dada con el punto inicial $(-2;\ 3)$.

Para hallar la solución particular de la ecuación diferencial (1) puede ser dada la *condición inicial*: si $x = x_0$, entonces $y = y_0$. Esta condición se escribe en forma abreviada así:

$$y_{x=x_0} = y_0.$$

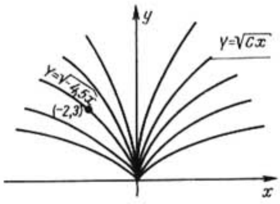


Fig. 162

La existencia de la condición inicial $y_{x=x_0} = y_0$ es equivalente a la existencia del punto inicial $(x_0,\ y_0)$.

4°. Interpretación geométrica de las soluciones. *La gráfica de una solución particular de una ecuación diferencial ordinaria se llama curva integral de esta ecuación.*

Geométricamente la solución general $y = \varphi(x,\ C)$ representa una familia de curvas integrales, dependientes de un parámetro*, que por cada punto $(x_0,\ y_0)$ del plano** pasa una curva única $y = \varphi(x,\ C_0)$, donde C_0 es la solución de la ecuación $y_0 = \varphi(x_0,\ C)$.

En la figura 162 se representa la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$; está también representada la curva integral con el punto inicial $(-2;\ 3)$.

La figura 163 da una idea de la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$ (ejemplo 5 § 136), es decir, de una familia de sinusoides. En la figura están representadas también las curvas integrales particula-

* Una familia de curvas, dependiente de un parámetro variable, que es la constante arbitraria C.

** Con la misma restricción, que respecto a la arbitrariedad de x_0, y_0.

res: las rectas $y = 1$ u $y = -1$, que son paralelas al eje Ox. Estas son tangentes a cada una de las sinusoides.

5°. Interpretación geométrica de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Aquí la derivada $\frac{dy}{dx}$ es una

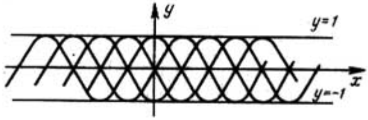


Fig. 163

función dada del punto (x, y) del plano xOy. Esto significa que *para cada punto* (x, y) *del plano*, la ecuación da un valor único determinado de la derivada $\frac{dy}{dx}$, es decir, *da el coeficiente angular de la tangente a la única curva integral que*

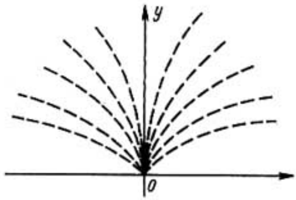


Fig. 164

pasa por dicho punto, la cual es la gráfica de la solución de la ecuación diferencial con el punto inicial (x, y).

Por lo tanto, *la ecuación diferencial* $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ *determina la dirección de las tangentes en los puntos del plano* xOy; se dice brevemente, *que determina un campo direccional en el plano* xOy.

En la fig. 164 se representa el campo direccional de la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$. Las direcciones se indican por pequeños segmentos rectilíneos.

6°. A veces, al hallar la solución general de la ecuacion (I) no se obtiene la solución general $y = \varphi(x, C)$, sino una igualdad que relaciona a x, y y C:

$$F(x, y, C) = 0,$$

la cual determina implícitamente la solución general. Esta igualdad se llama *integral general de la ecuación diferencial dada*.

La ecuación $F(x, y, C_0) = 0$ se llama *integral particular de la ecuación diferencial para el punto inicial* (x_0, y_0), o para la condición inicial $y_{x=x_0} = y_0$.

§ 138. Ecuación de primer orden de variables separables y separadas

1°. Si la ecuación diferencial dada de primer orden y de primer grado respecto a la derivada puede reducirse a la forma

$$\boxed{f_1(y)\,dy = f_2(x)\,dx,} \qquad \text{(II)}$$

entonces ésta se llama *ecuación de variables separables*, y la ecuación (II) obtenida, *ecuación de variables separadas.*

La resolución de una ecuación de variables separadas consiste en integrar el primer miembro respecto a y, y el segundo respecto a x. Las integrales obtenidas pueden diferenciarse sólo en una constante arbitraria C; esto se denota en la fórmula agregando C a una de ellas:

$$\boxed{\int f_1(y)\,dy = \int f_2(x)\,dx + C.} \qquad \text{(III)}$$

A veces la ecuación (II) se toma en la forma

$$\boxed{f_1(y)\,dy + f_2(x)\,dx = 0.} \qquad \text{(IIa)}$$

Entonces la fórmula (III) toma la forma

$$\boxed{\int f_1(y)\,dy + \int f_2(x)\,dx = C.} \qquad \text{(IIIa)}$$

2°. Nota. La ecuación más sencilla de primer grado de variables separables es aquélla de la que se parte al introducir el concepto de integral indefinida (capítulo X):

$$\frac{dy}{dx}=f(x).$$

De ella se obtuvo la ecuación de variables separadas:

$$dy=f(x)\,dx,$$

así como su solución general:

$$y=\int f(x)\,dx,$$

y si era dado el punto inicial (§ 113, 3°), se obtenía una solución particular.

3°. Ejemplo 1. Hallar la solución general de la ecuación $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}$.

Solución. La ecuación dada es de variables separables. En efecto, dividiéndola entre y (suponiendo que $y\neq 0$) y multiplicando por dx, se obtiene $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{2x}$, que es una ecuación de variables separadas. Aplicando la fórmula (III), se tiene:

$$\int\frac{dy}{y}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+C.$$

De aquí

$$\ln|y|=\frac{1}{2}(\ln|x|+\ln C).$$

Potenciando, se obtiene la solución general:

$$y=\sqrt{Cx}.$$

4°. Ejemplo 2. Integrar la ecuación $\frac{dy}{dx}=\frac{1+x^2}{x(1+y^2)}$.

Solución. Integrar una ecuación diferencial significa hallar sus soluciones, o integrales.

Multiplicando la ecuación dada por $(1+y^2)\,dx$, se obtiene una ecuación de variables separadas:

$$(1+y^2)\,dy=\frac{1+x^2}{x}\,dx,\quad \text{o}\quad (1+y^2)\,dy=\left(\frac{1}{x}+x\right)dx.$$

Aplicando la fórmula (III), se obtiene:

$$\int(1+y^2)\,dy=\int\left(\frac{1}{x}+x\right)dx+C,$$

$$y+\frac{y^3}{3}=\ln|x|+\frac{x^2}{2}+C.$$

De aquí, la integral general de la ecuación dada es:

$$y+\frac{1}{3y^3}-\ln|x|-\frac{1}{2}x^2=C.$$

5°. Ejemplo 3. Resolver la ecuación $\operatorname{sen} x \cos y\, dx + \cos x \operatorname{sen} y\, dy = 0$.

Solución. Esta es una ecuación de variables separables, ya que al dividirla entre $\cos y \cos x$ (suponiendo que $\cos y \neq 0$ y $\cos x \neq 0$), se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx+\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}\,dy=0.$$

La aplicación de la fórmula (IIIa) da

$$\int\frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos x}+\int\frac{\operatorname{sen} y\,dy}{\cos y}=C;$$

$$-\ln|\cos x|-\ln|\cos y|=C, \quad \text{o} \quad \ln|\cos x|+\ln|\cos y|=-C.$$

Potenciando, se obtiene la integral general en la forma

$$\cos x\cos y=e^{-C}, \text{ donde } \cos x\neq 0, \ \cos y\neq 0 \ \text{y} \ C\geqslant 0.$$

Al dividir entre $\cos x \cos y$, hemos despreciado las posibles soluciones

$$\cos x=0 \quad \text{y} \quad \cos y=0,$$

es decir,

$$x=\pm\frac{1}{2}\pi;\ \pm\frac{3}{2}\pi;\ \ldots;\ y=\pm\frac{1}{2}\pi;\ \pm\frac{3}{2}\pi;\ \ldots$$

Estas funciones satisfacen efectivamente a la ecuación diferencial dada (lo que puede verificarse) y, por tanto, son sus soluciones.

6°. Ejemplo 4. Hallar las curvas integrales de la ecuación diferencial $y \ln y\, dx + x\, dy = 0$, y aquélla que pasa por el punto: a) $(e;\ e)$, b) $(1,\ 1)$.

Solución. Dividamos la ecuación $y \ln y\, dx + x\, dy = 0$ entre $xy \ln y$, considerando que $x \neq 0$, $\ln y \neq 0$ y, por lo tanto, $y > 0$ e $y \neq 1$. Se obtiene

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y\ln y}=0,$$

y, en virtud de la fórmula (IIIa),

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dy}{y\ln y}=C. \qquad (*)$$

La primera integral es tabular; la segunda se halla por medio de la sustitución $\ln y=t$, $\frac{dy}{y}=dt$:

$$\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln|\ln y|.$$

De este modo, se obtiene la integral general:

$$\ln|x|+\ln|\ln y|=C.$$

Hallaremos ahora la curva de esta familia de curvas integrales que pasa por el punto $(e;\ e)$. Sustituyendo las coordenadas de $(e;\ e)$ en la integral general, se obtiene:

$$\ln e + \ln \ln e = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1;\quad C = 1,$$

y la ecuación de la curva integral que pasa por el punto $(e;\ e)$ es: $\ln |x| + \ln |\ln y| = 1$.

En la ecuación de la familia de curvas integrales es $y > 0$ e $y \neq 1$; por esto, no es posible sustituir en ella las coordenadas del segundo *punto dado* $(1;\ 1)$.

Sin embargo, la función $y = 1$ satisface la ecuación diferencial dada. En efecto, si $y = 1$ para todo x, entonces $\ln y = 0$ y $dy = 0$ para todo x, y al sustituir estos valores en la ecuación dada, se obtiene: $0 \equiv 0$.

Esto significa que por el punto $(1;\ 1)$ pasa la recta integral $y = 1$.

7°. *Sobre la verificación de las soluciones.* La verificación de la solución de una ecuación diferencial se efectúa sustituyendo esta solución (o integral) en la ecuación dada. Al hacerlo, evidentemente, siempre hay que hallar la derivada de la función y respecto a x.

Detengámonos en el caso en que se ha obtenido la integral general e y es, de este modo, *una función implícita de x. La derivada de y respecto a x puede ser hallada sin resolver la ecuación obtenida respecto a x.*

Verifiquemos la solución del ejemplo 2. La integral general es

$$y + \frac{1}{3}\, y^3 - \ln |x| - \frac{1}{2}\, x^2 = C.$$

Derivémosla respecto a x, teniendo en cuenta que y es función de x, que la derivada de y respecto a x es $y' = \frac{dy}{x}$, que y^3 es una función de la función y de x, y que la derivada de y^3 se halla como la derivada de una función de función (fórmula XI, § 85): $(y^3)' = 3y^2y'$. Obsérvese, además, que la derivada $\ln |x| = \frac{1}{x}$ (§ 89,5°). De este modo, derivando la integral general, se obtiene:

$$y' + \frac{1}{3}\cdot 3y^2y' - \frac{1}{x} - x = 0.$$

De aquí

$$(1 + y^2)\cdot y' - \frac{1 + x^2}{x} = 0.$$

De esto se obtiene

$$y' = \frac{1 + x^2}{x\,(1 + y^2)}.\ \text{De este modo,}\ \frac{1 + x^2}{x\,(1 + y^2)} \equiv \frac{1 + x^2}{x\,(1 + y^2)}.$$

Verifiquemos la solución del ejemplo 4. La integral general es:

$$\ln |x| + \ln |\ln y| = C.$$

Derivémosla respecto a x, considerando que $\ln |\ln y|$ es una función de la función y de x, y que su derivada se halla según la fórmula (X) del § 85 y el 5°, § 89:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln y}\cdot(\ln y)'=0;\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{\ln y}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

Eliminando denominadores, se obtiene:

$$y\ln y\,dx+x\,dy=0;\ 0\equiv 0.$$

§ 139. Ecuaciones diferenciales homogéneas de primer orden

1°. Definición. La función $f(x, y)$ se llama *función homogénea de dimensión n* (de grado n), si al multiplicar sus argumentos x e y por un cierto factor, ésta se multiplica por la potencia n de dicho factor; es decir, si

$$f(tx, ty)=t^n f(x, y);$$

$f(x, y)$ es una *función homogénea de dimensión cero*, si

$$f(tx, ty)=f(x, y).$$

Ejemplos. 1) $f(x, y)=x^3-2xy^2$ es una función homogénea de dimensión tres, ya que al multiplicar x e y por t, se obtiene:

$$f(tx, ty)=(tx)^3-2(tx)(ty)^2=t^3x^3-2t^3xy^2=t^3(x^3-2xy^2)=t^3f(x, y).$$

2) $f(x, y)=\frac{x^2-xy}{y^2+xy}$ es una función homogénea de dimensión cero, ya que al multiplicar x e y por t, se obtiene:

$$f(tx, ty)=\frac{(tx)^2-(tx)(ty)}{(ty)^2+(tx)(ty)}=\frac{t^2(x^2-xy)}{t^2(y^2+xy)}=t^0\,\frac{x^2-xy}{y^2+xy}=$$
$$=t^0f(x, y)=f(x, y).$$

2°. *Una función homogénea $f(x, y)$ de dimensión cero es función del cociente de los argumentos* $\frac{y}{x}$.

En efecto, tomemos a $1/x$ como factor de los argumentos. Como $f(x, y)$ es una función homogénea de dimensión cero, se verifica la igualdad

$$f\left(\frac{1}{x}\cdot x,\ \frac{1}{x}\cdot y\right)=f(x, y).$$

De aquí

$$f(x, y)=f\left(1,\ \frac{x}{y}\right);$$

$f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ es una función del cociente de los argumentos $\frac{y}{x}$; la denotaremos por el símbolo $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Se tiene así que la función homogénea de dimensión cero es

$$\boxed{f(x, y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).} \tag{IV}$$

3°. Definición. *La ecuación de primer orden* $\frac{dy}{dx}=$ $=f(x, y)$ *se llama homogénea, si* $f(x, y)$ *es una función homogénea de dimensión cero*, es decir, si

$$\boxed{f(tx, ty)=f(x, y).} \tag{V}$$

Esta relación tendrá lugar si la función dada $f(x, y)$ es un cociente de funciones homogéneas $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ de igual dimensión. Por eso *se llama ecuación diferencial homogénea de primer orden también a la ecuación*

$$\boxed{f_1(x, y)\,dx+f_2(x, y)\,dy=0,} \tag{VI}$$

en la que $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ *son funciones homogéneas de igual dimensión.*

4°. *La ecuación diferencial homogénea de primer orden se reduce a una de variables separables por medio de la sustitución* $\frac{y}{x}=u$ o $y=xu$.

En efecto, si la ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ es homogénea, e $\frac{y}{x}=u$, entonces

$$f(x, y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=\varphi(u).$$

Derivando la igualdad $y=xu$ respecto a x según la fórmula de la derivada de un producto, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=u+x\cdot\frac{du}{dx}.$$

De este modo, la ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ toma la forma

$$u+x\cdot\frac{du}{dx}=\varphi(u),$$

y ésta es una ecuación de variables separables.

Obsérvese que en su solución general o en su integral general, u debe sustituirse por $\frac{y}{x}$.

5°. Ejemplo. Resolver la ecuación $(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$.
Solución. $x^2 + y^2$ y xy son funciones homogéneas de una misma dimensión, igual a dos. Esto significa que la ecuación dada es homogénea, del tipo (VI), y se reduce a una de variables separables por medio de la sustitución

$$y = xu.$$

De aquí

$$dy = u\,dx + x\,du$$

Sustituyendo las expresiones de y y dy en la ecuación dada, se obtiene:

$$(x^2 + x^2u^2)\,dx - x\cdot xu\,(u\,dx + x\,du) = 0;$$

$$x^2\,(1 + u^2)\,dx - x^2\,(u^2\,dx + xu\,du) = 0.$$

Suponiendo que $x^2 \neq 0$, se divide la ecuación por x^2. Entonces, se obtiene:

$$dx + u^2\,dx - u^2\,dx - xu\,du = 0;\quad dx - xu\,du = 0;$$

$$\frac{dx}{x} - u\,du = 0;\quad \int \frac{dx}{x} - \int u\,du = C;\quad \ln|x| - \frac{u^2}{2} = C,$$

o, como $u = \frac{y}{x}$,

$$\ln|x| - \frac{y^2}{2x^2} = C. \tag{1}$$

Esta integral general de la ecuación diferencial dada puede ser representada en otra forma. Escribiéndola de la siguiente manera:

$$\ln|x| = \frac{y^2}{2x^2} + \ln|C|,$$

se potencia esta expresión, y se obtiene la integral general en la forma siguiente (§ 85,5°):

$$x = C\cdot e^{\frac{y^2}{2x^2}}, \tag{2}$$

donde

$$-\infty < x < 0,\quad 0 < x < +\infty.$$

Obsérvese que la función $x = 0$ también satisface la ecuación diferencial dada, lo que puede verificarse directamente.

6°. Nota. En los cursos detallados de análisis, se demuestra que las distintas expresiones de la integral general de una ecuación diferencial dada, están ligadas por una dependencia determinada, más precisamente, una de las integrales es una cierta función de la otra. En el ejemplo 5°, la integral (1) es el logaritmo natural de la (2).

7°. Verificación de la solución del ejemplo. Derivando la integral general (2) respecto a x, se obtiene la ecuación diferencial

$$1 = Ce^{\frac{y^2}{2x^2}}\left(\frac{y^2}{2x^2}\right)' = Ce^{\frac{y^2}{2x^2}}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{2y\cdot y'\cdot x^2 - 2x\cdot y^2}{x^4} =$$

$$= Ce^{\frac{y^2}{2x^2}}\cdot\frac{xyy'-y^2}{x^3}. \tag{3}$$

La constante arbitraria C se excluye de la siguiente manera: se halla C de (2), y se sustituye la expresión obtenida en (3):

$$C = \frac{x}{e^{\frac{y^2}{2x^2}}},\quad 1 = \frac{x}{e^{\frac{y^2}{2x^2}}}\cdot e^{\frac{y^2}{2x^2}}\cdot\frac{xyy'-y^2}{x^3}.$$

Se obtiene:

$$1 = \frac{xyy'-y^2}{x^2},$$

de donde

$$x^2+y^2-xy\frac{dy}{dx}=0,\ \text{o}\ (x^2+y^2)\,dx - xy\,dy = 0;\ 0\equiv 0.$$

§ 140. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

1°. Definición. *Una ecuación deferencial se llama lineal, si es de primer grado respecto a la función incógnita y a sus derivadas.*

Por definición, la ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la forma

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)\,y = Q(x).} \tag{VII}$$

2°. La solución de la ecuación lineal de primer orden puede hallarse por medio de la sustitución

$$y = uv,$$

donde y y v son funciones derivables de x. Si $y=uv$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx},$$

y la ecuación dada (VII) toma la forma

$$u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}+uvP(x) = Q(x).$$

De aquí

$$v\left[\frac{du}{dx}+uP(x)\right]+u\cdot\frac{dv}{dx}=Q(x). \tag{1}$$

Supongamos que la función u es tal, que

$$\frac{du}{dx}+uP(x)=0. \tag{2}$$

De esta condición puede determinarse u, separando las variables:

$$\frac{du}{u}=-P(x)\,dx;$$

$$\ln|u|=-\int P(x)\,dx, \text{ o } u=e^{-\int P(x)\,dx} \tag{3}$$

Con la condición (2), la ecuación (1) toma la forma

$$u\cdot\frac{dv}{dx}=Q(x). \tag{4}$$

Las dos funciones de x que figuran en esta ecuación son conocidas: u está determinada por (3), $Q(x)$ es dada. Esta es una ecuación de variables separables; resolviéndola, se halla la función v:

$$dv=\frac{Q(x)}{u}\,dx;\ v=\int\frac{Q(x)}{u}\,dx+C. \tag{5}$$

Conociendo ahora u y v, se halla $y=uv$. Por lo tanto, *la ecuación diferencial lineal de primer orden*

$$\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)$$

puede ser llevada, por medio de la sustitución $y=uv$, a dos ecuaciones de variables separables:

$$\boxed{\frac{du}{dx}+uP(x)=0 \quad \text{y} \quad u\cdot\frac{dv}{dx}=Q(x),} \tag{VIII}$$

el producto de las soluciones de las cuales da y.

2° **Ejemplo 1.** Resolver la ecuación $y'-y\operatorname{tg}x=2\operatorname{sen}x$.
Solución. Esta es una ecuación lineal de primer orden, donde

$$P(x)=-\operatorname{tg}x,\ Q(x)=2\operatorname{sen}x.$$

Introduciendo la sustitución $y=uv$, se hallan u y v de las ecuaciones (VIII):

$$\frac{du}{dx}-u\operatorname{tg}x=0 \quad \text{y} \quad u\cdot\frac{dv}{dx}=2\operatorname{sen}x$$

Se resuelve la primera de estas ecuaciones:

$$\frac{du}{u}=\operatorname{tg}x\cdot dx;\quad \int\frac{du}{u}=\int\operatorname{tg}x\,dx;\quad \ln|u|=-\ln|\cos x|;\quad u=\frac{1}{\cos x}\,.$$

La expresión hallada de u se sustituye en la segunda ecuación:

$$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{dv}{dx}=2\operatorname{sen}x.$$

Se resuelve esta ecuación:

$$dv=2\operatorname{sen}x\cos x\,dx,\quad \text{o}\quad dv=\operatorname{sen}2x\,dx;$$

$$\int dv=\int\operatorname{sen}2x\,dx+C;\quad v=\frac{-1}{2}\cos 2x+C.$$

Multiplicando u por v, se obtiene:

$$y=\frac{-\frac{1}{2}\cos 2x+C}{\cos x},\ \text{o}\ y=\frac{C-\cos 2x}{2\cos x}\,.$$

3° Ejemplo 2. Resolver la ecuación $y+(1-2x)\,y=xe^{-x}$.
Solución. La ecuación dada es lineal;

$$P(x)=1-2x,\ Q(x)=xe^{-x}.$$

Introduciendo la sustitución $y=uv$, se hallan u y v de las ecuaciones (VIII):

$$\frac{du}{dx}+u(1-2x)=0 \quad \text{y} \quad u\cdot\frac{dv}{dx}=xe^{-x}.$$

Se resuelve la primera ecuación:

$$\frac{du}{u}=(2x-1)\,dx;\quad \int\frac{du}{u}=\int(2x-1)\,dx;$$

$$\ln|u|=x^2-x;\ u=e^{x^2-x}.$$

La expresión hallada de u se sustituye en la segunda ecuación:

$$e^{x^2-x}\,\frac{dv}{dx}=xe^{-x}.$$

De donde

$$\frac{dv}{dx}=xe^{-x}e^{x-x^2}=xe^{-x^2};$$

$$dv=xe^{-x^2}\,dx;\ v=\int xe^{-x^2}\,dx+C.$$

La integral se halla por medio de la sustitución $-x^2=t$, $x\,dx=$ $=-\frac{1}{2}\,dt$,

$$v=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

$$y=uv=e^{x^2-x}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C\right)=-\frac{1}{2}e^{-x}+Ce^{x^2-x}.$$

De este modo, la solución general es:

$$y=-\frac{1}{2}e^{-x}+Ce^{x^2-x}.$$

Verificación. Se halla la derivada de y respecto a x:

$$y'=\frac{1}{2}e^{x}+Ce^{x^2-x}(2x-1).$$

De la solución general se determina C:

$$C=\frac{y+\frac{1}{2}e^{-x}}{e^{x^2-x}},$$

y se sustituye en la derivada hallada. Se obtiene así:

$$y'=\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{y+\frac{1}{2}e^{-x}}{e^{x^2-x}}\cdot e^{x^2-x}(2x-1)=y(2x-1)+xe^{-x}.$$

Sustituyendo la expresión de y' en la ecuación dada, se obtiene:

$$(2x-1)\,y+xe^{-x}+(1-2x)\,y=xe^{-x};\quad xe^{-x}\equiv xe^{-x}.$$

§ 141. Problemas que se reducen a la resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden

Problemas geométricos

1°. Problema 1. Hallar la ecuación de una familia de curvas, conociendo que cada punto de la curva de la familia es medio del segmento de la tangente trazada a ella desde dicho punto, comprendido entre los ejes de coordenadas.

Solución. Sea $T(x, y)$ un punto de la curva de la familia, y supongamos que por él se traza una tangente, la cual corta a los ejes Ox y Oy en los puntos A y B (fig. 165). Por hipótesis, el punto $T(x, y)$ es medio del segmento AB. Partiendo de las fórmulas de las coordenadas del punto medio de un segmento, se halla que las coordenadas $A\ (2x;\ 0)$ y $B\ (0;\ 2y)$ (por hipótesis, $x\neq 0$ e $y\neq 0$).

El coeficiente angular de la tangente AB, en virtud de la fórmula (VI), § 5, es:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0-2y}{2x-0}=-\frac{y}{x}.$$

Se obtiene así la ecuación diferencial de la familia de curvas:

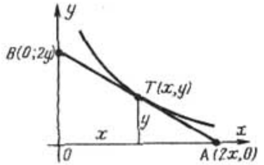
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

La ecuaclón se integra separando las variables:

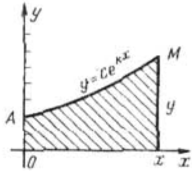
$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0;\ \int\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=\ln C;\ \ln y+\ln x=\ln C;\ xy=C$$

Esta es una familia de hipérbolas equiláteras, referida a sus asíntotas.

2°. P r o b l e m a 2. Hallar la ecuación de una familia de curvas, si en el segmento $[0;\ x>0]$ la ordenada de un



F i g. 165



F i g. 166

punto de la curva de la familia es proporcional a la superficie determinada por la curva, los ejes coordenados, y dicha ordenada.

S o l u c i ó n. La superficie del trapecio curvilíneo (fig. 166) comprendido bajo la curva en el segmento $[0;\ x]$, es (§ 125):

$$\int_0^x y\,dx.$$

Por hipótesis, la ordenada y, que delimita la superficie por la derecha, es proporcional a dicha superficie, es decir,

$$y=k\int_0^x y\,dx.$$

La derivada de una integral definida respecto a su límite superior es igual a la función sub-integral:

$$\frac{dy}{dx} = k\left(\int_0^x y\,dx\right)' = ky.$$

Se obtiene así la ecuación diferencial de la familia de curvas:

$$\frac{dy}{dx} = ky.$$

Esta se resuelve separando las variables:

$$\frac{dy}{y} = k\,dx; \quad \int \frac{dy}{y} = k\int dx + C;$$

$$\ln|y| = kx + \ln C.$$

Potenciando esta expresión, se obtiene la familia de curvas integrales, cuya superficie es proporcional a la ordenada que la delimita por la derecha:

$$y = Ce^{kx}.$$

Problemas de la técnica y de las ciencias naturales

3°. **Problema 3.** En un recipiente se hallan A litros de salmuera, que contiene a kg, de sal diluida. Del recipiente sale uniformemente salmuera con una velocidad de p litros por minuto; al mismo tiempo en el recipiente entra agua dulce con la misma velocidad, la cual se mezcla inmediatamente con la salmuera, por lo cual ésta se distribuye en forma homogénea en todo el recipiente. Tal proceso se llama empobrecimiento de la salmuera.

Formar la ecuación diferencial del empobrecimiento de la salmuera, y hallar cuánta sal habrá en ella luego de una hora, suponiendo que $A = 100l$, $p = 2l$ por minuto, $a = 10$ kg.

Solución. Obsérvese que al comienzo del proceso la concentración de la solución era igual a $\frac{a}{A}\frac{\text{kg}}{\text{l}}$. Fijemos un momento de tiempo t, contando t a partir del comienzo del proceso de empobrecimiento de la salmuera. Supongamos que en el momento t, en el recipiente quedaban y kg de sal.

La concentración de la salmuera en el momento t es igual a $\frac{y}{A}\frac{\text{kg}}{\text{l}}$.

Fijemos otro momento de tiempo $t + \Delta t$, mayor que t; supongamos que en este momento de tiempo en el recipiente quedan $y + \Delta y$ kg de sal. De este modo, en el intervalo Δt la cantidad de sal en la salmuera disminuye en $-\Delta y$.

Puede calcularse Δy aproximadamente, suponiendo que Δt es pequeño, y que la concentración de la salmuera durante el intervalo Δt queda igual a la del momento t, es decir, igual a $\frac{y}{A}\frac{\text{kg}}{\text{l}}$. Durante el intervalo de tiempo Δt salen $p\ \Delta t$ litros de salmuera, cuya concentración es igual a $\frac{y}{A}\frac{\text{kg}}{\text{l}}$, por lo que en la salmuera que salió hay $\frac{y}{A}\cdot p\cdot\Delta t$ kg de sal.

Por lo tanto,

$$\Delta y \approx -\frac{p}{A}\cdot y\Delta t.$$

En esta igualdad el error de la aproximación disminuye al disminuír Δt, y $-\frac{p}{A}\cdot y\Delta t$ depende de Δt en forma lineal; por lo tanto, $-\frac{p}{A}\cdot y\Delta t$ es la parte principal del incremento Δy, es decir, tiene lugar la igualdad exacta

$$dy = -\frac{p}{A}\cdot y\,dt,$$

de donde

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = -\frac{p}{A}\cdot y.}$$

Esta es la ecuación deferencial del proceso de empobrecimiento de la salmuera.

Para resolver el segundo punto del problema, hallaremos la solución general de la ecuación diferencial, y de ésta, la solución particular con la condición inicial: si $t = 0$, entonces $y = a = 10$.

Separando variables, se halla que

$$\frac{dy}{y} = -\frac{p}{A}\cdot dt;\quad \int\frac{dy}{y} = -\frac{p}{A}\int dt + \ln C;$$

$$\ln y = -\frac{p}{A}t + \ln C;\quad \boxed{y = Ce^{-\frac{p}{A}t}}$$

Hallemos C, sustituyendo en la solución general $t=0$, $y=10$. Se obtiene:

$$10 \cdot Ce^0; \ C=10.$$

Por lo tanto, para $P=2$, $A=100$, $C=10$, se tiene que:

$$y=10e^{-0,02t}.$$

Para $t=60$

$$y=10e^{-1,2} \approx 2,8 \ (\text{kg.}).$$

4°. Problema 4. Agreguemos a las condiciones del tercer problema la siguiente: la salmuera que sale del recipiente, entra en un sagundo recipiente con la misma capacidad de Al, que originariamente está lleno da agua dulce; en él se mezcla de inmediato, y sale uniformemente del recipiente con la misma velocidad de p litros por minuto.

Hallar la ecuación diferencial del proceso de variación de la salmuera en el segundo recipiente, y determinar cuánta sal habrá en él luego de 1 hora.

Dar la solución en forma numérica, suponiendo que $A=100l$, $a=10$ kg, $p=2l$ por minuto.

Solución. Fijemos un momento de tiempo t. Según la solución del tercer problema, en el momento t en el primer recipiente habían $10e^{-0,02t}$ kg de sal y, por lo tanto, quedaba una salmuera de concentración igual a

$$\frac{10e^{-0,02t}}{100}=0,1e^{-0,02t}\left(\frac{kg}{l}\right).$$

Considerando que esta concentración de la salmuera no varía durante un intervalo pequeño de tiempo Δt, se halla que del primer recipiente pasan al segundo

$$0,1e^{-0,02t}2\Delta t=0,2e^{-0,02t}\Delta t \ (\text{kg de sal}). \qquad (1)$$

Sea z la cantidad de sal en el segundo recipiente en el momento t. En el intervalo Δt, del segundo recipiente salen

$$-\frac{z}{100}\cdot 2\Delta t=-0,02z\Delta t \ (\text{kg de sal}). \qquad (2)$$

El incremento Δz de la cantidad de sal z en el segundo recipiente durante el intervalo de tiempo Δt, es la diferencia entre la cantidad de sal que entra (1) y la que sale (2), es decir,

$$\Delta z \approx 0\ 2e^{-0,02t}\Delta t-0,02z\Delta t; \ \Delta z \approx (0,2e^{-0,02t}-0,02z)\,\Delta t.$$

Esta igualdad es aproximada; su segundo miembro es la parte lineal principal del incremento Δz, es decir, tiene lugar la igualdad exacta

$$dz = (0{,}2e^{-0{,}02t} - 0{,}02z)\,dt.$$

Esta es la ecuación diferencial del proceso de variación de la cantidad de sal en el segundo recipiente. Escribiéndola en la forma

$$\frac{dz}{dt} + 0{,}02z = 0{,}2e^{-0{,}02t}. \qquad (3)$$

se ve que esta ecuación es lineal. La resolveremos introduciendo la sustitución

$z = u(t)\,v(t)$, o más brevemente:

$$z = uv; \quad \frac{dz}{dt} = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt}.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3), se obtiene:

$$u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt} + 0{,}02uv = 0{,}2e^{-0{,}02t};$$

$$v\left(\frac{du}{dt} + 0{,}02u\right) + u\frac{dv}{dt} = 0{,}2e^{-0{,}02t}.$$

Haciendo

$$\frac{du}{dt} + 0{,}02u = 0,$$

se halla que

$$\frac{du}{u} = -0{,}02dt;$$

$$\ln|u| = -0{,}02t$$

$$u = e^{-0{,}02t}$$

se obtiene entonces:

$$u\frac{dv}{dt} = 0{,}2e^{-0{,}02t}.$$

$$e^{-0{,}02t}\cdot\frac{dv}{dt} = 0{,}2e^{-0{,}02t}; \quad \frac{dv}{dt} = 0{,}2;$$

$$dv = 0{,}2dt; \quad v = 0{,}2t + C.$$

$$z = uv; \quad z\,(0{,}2t + C)\,e^{-0{,}02t}.$$

Determinemos C partiendo de los valores iniciales: en el segundo recipiente al comienzo del proceso es $t = 0$, y la cantidad de sal es $z = 0$. Sustituyendo estos valores en (4), se obtiene $C = 0$. Por lo tanto, la cantidad de sal en el segundo recipiente luego de t minutos es

$$z = 0{,}2te^{-0{,}02t} \text{ (kg)}.$$

Para $t=60$ (al cabo de 1 hora), en el segundo recipiente habrán

$$z=0{,}2\cdot 60e^{-0{,}02\cdot 60}=12e^{-1{,}2}\approx 3{,}6 \text{ (kg)}$$

de sal.

5°. Problema 5. La ley de desintegración del radio consiste en que la velocidad de desintegración en cada momento de tiempo es proporcional a la cantidad de radio existente. Determinar la ley de desintegración del radio en función del tiempo, si al principio (para $t=0$) habían R_0 g de radio.

Solución. Supongamos que en los momentos de tiempo t y $t+\Delta t$ la cantidad de radio era R y $R+\Delta R$. El cociente $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ es la velocidad media de desintegración del radio durante el intervalo de tiempo Δt, y $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\Delta R}{\Delta t}=\frac{dR}{dt}$ es la velocidad de desintegración del radio en el momento de tiempo t. Por hipótesis, al crecer t, R disminuye, por lo que la derivada $\frac{dR}{dt}$ es negativa; por hipótesis ésta es proporcional a R. Designando el coeficiente de proporcionalidad por λ $(\lambda>0)$, se tiene:

$$\boxed{\frac{dR}{dt}=-\lambda R,} \tag{1}$$

que es la ecuación diferencial de la desintegración del radio.

Integrando la ecuación (1), se obtiene:

$$\frac{dR}{R}=-\lambda\, dt;\ \ln R=-\lambda t+\ln C,$$

$$R=Ce^{-\lambda t}$$

Partiendo de los valores iniciales $t=0$ y $R=R_0$, se determina C:

$$R_0=Ce^{-\lambda_0};\ C=R_0$$

Sustituyendo este valor de C en la ecuación (2), se obtiene:

$$\boxed{R=R_0e^{-\lambda t}.} \tag{3}$$

Tal es la ley de desintegración del radio en función del tiempo t.

El coeficiente λ se determina experimentalmente. Supongamos, por ejemplo, que empíricamente se ha establecido que en t_0 años se desintegran $p\%$ de R_0 y, por lo tanto, la cantidad de radio al pasar t_0 años se hace igual a

$$R_0 - \frac{p}{100} \cdot R_0 = R_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right) .$$

Pero en virtud de la ley (3), al pasar t_0 años ésta será igual a

$$R_0 e^{-\lambda t_0}.$$

Por lo tanto, se tiene la igualdad

$$R_0 \left(1 - \frac{p}{100}\right) = R_0 e^{-\lambda t_0}$$

de la cual se halla λ:

$$e^{-\lambda t_0} = 1 - \frac{p}{100}; \quad -\lambda t_0 = \ln \left(1 - \frac{p}{100}\right),$$

$$\lambda = -\frac{1}{t_0} \ln \left(1 - \frac{p}{100}\right) . \tag{4}$$

6°. Hallaremos la relación entre la constante λ y el período de semidesintegración del radio (de este modo se llama el tiempo durante el cual se desintegra la mitad de la cantidad original de radio).

Denotemos por τ el período de semidesintegración. Según (4); se tiene

$$\lambda = -\frac{1}{\tau} \ln \left(1 - \frac{50}{100}\right) = -\frac{1}{\tau} \ln \frac{1}{2} ;$$

$$\boxed{\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} .}$$

Fue establecido empíricamente que, por ejemplo, para el isótopo del radio ^{226}Ra, $\lambda \approx 0{,}000429$. El período de semidesintegración es, entonces,

$$\tau \approx \frac{\ln 2}{0{,}000429} = \frac{0{,}69315}{0{,}000429} \approx 1616 \text{ (años)}.$$

§ 142. Ecuaciones diferenciales de segundo orden que se reducen a ecuaciones de primer orden

1°. La ecuación diferencial de segundo orden del tipo

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=f(x),} \tag{IX}$$

donde $f(x)$ es una función continua de x, se resuelve del siguiente modo: haciendo $\frac{dy}{dx}=z$ se tiene $\frac{d^2x}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$. Por lo tanto, se obtiene la ecuación de primer orden:

$$\frac{dz}{dx}=f(x);\ \ dz=f(x)\,dx.$$

De aquí

$$z=\int f(x)\,dx=F(x)+C_1.$$

Sustituyendo z por la derivada $\frac{dy}{dx}$, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=F(x)+C_1;\ \ dy=F(x)\,dx+C_1\,dx;$$

$$y=\int F(x)\,dx+C_1\int dx+C_2.$$

2° Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la curva $y=\varphi(x)$, si 1) $\frac{d^2y}{dx^2}=6x^2$, 2) la curva pasa por el punto (1; 2), y tiene en dicho punto una dirección igual a 3 (se llama dirección de una curva en un punto a la dirección de su tangente en dicho punto).

Solución. Integremos la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}=6x^2$.

Haciendo $\frac{dy}{dx}=z$, se obtiene $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$; $\frac{dz}{dx}=6x^2$

$$dz=6x^2\,dx;\ \int dz=6\int x^2\,dx+C_1;\ \ z=2x^3+C_1,$$

o

$$\frac{dy}{dx}=2x^3+C_1. \tag{1}$$

Integrando esta ecuación, se halla que

$$y=\frac{1}{2}x^4+C_1x+C_2. \tag{2}$$

Se obtiene así una familia de curvas integrales que depende de dos parámetros variables, los cuales son las constantes arbitrarias C_1 y C_2.

Por hipótesis, de esta familia debe hallarse una curva, para la cual C_1 y C_2 se determinan por las dos condiciones iniciales: 1) la curva pasa por el punto (1; 2), 2) la dirección en dicho punto, o sea, la derivada $\frac{dy}{dx}$, es igual a 3.

Sustituyendo $x=1$, $y=2$, $\frac{dy}{dx}=3$ *en* (1) *y* (2), *se obtiene:*

$$\begin{cases} 3=2+C_1; & C_1=1; \\ 2=\frac{1}{2}+C_1+C_2; & C_1+C_2=1\frac{1}{2};\ C_2=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

La ecuación buscada de la curva es: $y=\frac{1}{2}x^4+x+\frac{1}{2}$.

3°. Ecuaciones del tipo

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=f(y).} \tag{X}$$

Solución. Se hace $\frac{dy}{dx}=z$. Entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot z,$$

puesto que $\frac{dy}{dx}=z$. Por lo tanto, se obtiene una ecuación de variables separables

$$\frac{dz}{dy}z=f(y).$$

De aquí se tiene

$$z\,dz=f(y)\,dy.$$

Integrando, se halla z, y luego, sustituyendo z por $\frac{dy}{dx}$, se obtiene una ecuación de variables separables y y x.

4°. Ejemplo 2. Problema de la segunda velocidad cósmica: determinar la velocidad mínima con la que hay que arrojar un cuerpo de la Tierra verticalmente hacia arriba, para que éste no vuelva a ella. No tomar en cuenta la resistencia del aire.

Solución. Sea M la masa de la Tierra, y m la masa del cuerpo arrojado. Sobre un cuerpo arrojado verticalmente hacia arriba actúa la fuerza F de la atracción de la Tierra. Según la ley de Newton, esta fuerza es una magnitud variable, y en cada momento de tiempo t es

$$F=f\frac{Mm}{r^2},$$

donde f es un coeficiente, llamado consante gravitacional *; r es la distancia entre los centros de la Tierra y del cuerpo en el momento de tiempo t.

La fuerza F imprime a la masa m en el momento t una aceleración negativa, igual a $-\frac{d^2r}{dt^2}$. En virtud a que la fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración, se tiene:

$$F=-m\cdot\frac{d^2r}{dt^2}.$$

Igualando las expresiones de F, se obtiene la ley diferencial del movimiento del cuerpo arrojado:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-fM\cdot\frac{1}{r^2}. \qquad (1)$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden del tipo (X). La resolvenemos según fue indicado en el 3° para $y=r$ y $x=t$. Haciendo $\frac{dr}{dt}\, v$, se tiene:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=\frac{dv}{dr}\cdot v;$$

$$\frac{dv}{dr}\cdot v=-fM\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Separando las variables, se obtiene

$$v\,dv=-fM\frac{dr}{r^2};\quad \int v\,dv=-fM\int\frac{dr}{r^2}+C;$$

$$\frac{v^2}{2}=fM\cdot\frac{1}{r}+C. \qquad (2)$$

Para determinar el valor de C se tiene la condición inicial: en el momento $t=0$ de arrojar el cuerpo de la superficie de la Tierra, $r=R$, que es el radio de la Tierra, y la velocidad v es igual a la velocidad con que se arroja el cuerpo, $v=v_0$. Sustituyendo estos valores en (2), se halla C:

$$\frac{v_0^2}{2}=fM\cdot\frac{1}{R}+C;\quad C=\frac{v_0^2}{2}-fM\cdot\frac{1}{R}. \qquad (3)$$

En el momento $t=0$ de arrojar el cuerpo de la superficie de la Tierra, la fuerza F es la fuerza de la gravedad, la cual es igual a mg,

$$f\cdot\frac{Mm}{R^2}=mg,\ \text{de donde}\quad fM\cdot\frac{1}{R}=gR.$$

Sustituyendo en (3) el sustraendo por su magnitud igual gR, se obtiene

$$C=\frac{v_0^2}{2}-gR,$$

* La constante gravitacional es igual a $6{,}67\cdot10^{-8}$ cm³/g. seg.².

y (2), para este valor de C, da

$$\frac{v^2}{2}=fM\cdot\frac{1}{r}+\left(\frac{v_0^2}{2}-gR\right),$$

$$v=+\sqrt{2fM\cdot\frac{1}{r}+(v_0^2-2gR)}. \tag{4}$$

Para que el cuerpo arrojado hacia arriba no vuelva a la Tierra, su velocidad v debe ser positiva para todo r, lo que significa que la expresión subradical debe ser también positiva. El sumando $2fM\cdot\frac{1}{r}<0$, pero para r suficientemente grande puede ser arbitrariamente pequeño. Por eso, es necesario que

$$v_0^2-2gR\geqslant 0;$$

$$v_0\geqslant\sqrt{2gR}. \tag{5}$$

Es conocido que $g=9{,}81$ m/seg^2, $R=638\cdot 10^4$ m. Por lo tanto, debe ser:

$$v_0>\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 638\cdot 10^4}=112\cdot 10^2\ (\text{m/seg})=11{,}2\ (\text{km/seg}).$$

De este modo, el cuerpo no vuelve a la Tierra si se lo arroja verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_0>11{,}2$ km/seg Esta velocidad se llama segunda velocidad cósmica.

§ 143. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes

1°. Por definición (§ 140, 1°), la ecuación diferencial lineal de segundo orden tiene la forma

$$y''+p(x)\,y'+Q(x)\,y=F(x).$$

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son constantes, y $F(x)=0$, entonces la ecuación lineal de segundo orden se llama *homogénea con coeficientes constantes.*

De este modo, *la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes es una ecuación del tipo*

$$\boxed{y''+py'+qy=0,} \tag{XI}$$

donde p y q son números dados.

2°. Sean y_1 e y_2 dos soluciones de la ecuación (XI).

Definición. Las soluciones y_1 e y_2 se llaman *linealmente dependientes* en el segmento $[a, b]$, si para cualquier valor x de este segmento es $y_1=\lambda y_2$, donde λ es un cierto número, y se llaman *soluciones linealmente independientes,* si no existe tal número λ, es decir, si el cociente $\frac{y_1}{y_2}$ no es constante en el segmento $[a, b]$.

3°. Teorema 1. *Al producto de una solucion y_1 de la ecuación* (XI) *por un número constante C arbitrario, es también solución de la ecuación* (XI).

Demostración. Se sustituye Cy_1 en la ecuación (XI):

$$(Cy_1)'' + p(Cy_1)' + qCy_1 = C(y_1'' + py_1' + qy_1) = C \cdot 0 = 0;\ 0 \equiv 0.$$

Aquí $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$, como resultado de sustituír en la ecuación (XI) por y su solución.

De este modo, $0 \equiv 0$, y Cy_1 es solución de la ecuación (XI).

Teorema 2. *La suma de las soluciones y_1 e y_2 de la ecuación* (XI) *es también una solución de* (XI).

Demostración. Sustituyendo la suma $y_1 + y_2$ en la ecuación (XI), se tiene:

$$(y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2) = y_1'' + y_2'' + py_1' +$$
$$+ py_2' + qy_1 + qy_2 = (y_1'' + py_1' + qy_1) + (y_2'' + py_2' + qy_2) =$$
$$= 0 + 0 = 0,$$

ya que en los paréntesis están los resultados de sustituír en la ecuación (XI) y por sus soluciones y_1 e y_2.

De este modo, $0 \equiv 0$, e $y_1 + y_2$ es solución de la ecuación (XI), que es lo que se quería demostrar.

Teorema 3. *Si y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación* (XI), *y C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, entonces*

$$\boxed{y = C_1y_1 + C_2y_2} \qquad \text{(XII)}$$

es la solución general de la ecuación (XI).

Sobre la demostracion. El hecho que la función

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

es solución de la ecuación (XI) para valores cualesquiera de C_1 y de C_2, se deduce de los teoremas 1 y 2.

Según el teorema 3, $y = C_1y_1 + C_2y_2$ es la solución general. Esto significa que ésta posee la siguiente propiedad: para valores iniciales arbitrarios: $y = y_0$ e $y' = y_0'$ si $x = x_0$, la ecuación $y = C_1y_1 + C_2y_2$ da el siguiente sistema de ecuaciones respecto a las costantes arbitrarias C_1 y C_2:

$$y_0 = C_1 y_{10} + C_2 y_{20},$$
$$y_0' = C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}',$$

donde

$$y_{10} = (y_1)_{x=x_0}, \qquad y_{20} = (y_2)_{x=x_0},$$
$$y_{10}' = (y_1')_{x=x_0}, \qquad y_{20}' = (y_2')_{x=x_0},$$

el cual tiene una solución única $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$.

Sustituyendo en (XII) C_1 por su valor $\overline{C}_1$ y C_2 por su valor $\overline{C}_2$, se obtiene la solución

$$y_1 = \overline{C}_1 y_1 + \overline{C}_2 y_2,$$

la que satisface las condiciones iniciales dadas.

La demostración de que el sistema (*) tiene siempre una solución $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$ y sólo una, sale de los límites del presente curso.

4°. Según el tercer teorema, la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden se habrá hallado si se encuentran dos soluciones particulares de ésta linealmente independientes.

Pueden hallarse dos soluciones particulares, si se aplica la sustitución

$$y = e^{kx}, \quad y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

La ecuación (XI) toma entonces la forma

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0, \text{ o bien } e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Puesto que $e^{kx} \neq 0$, se tiene

$$\boxed{k^2 + pk + q = 0.} \tag{XIII}$$

La ecuación (XIII) se llama *ecuación característica de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.*

Son posibles los siguientes casos:

1) las raíces de la ecuación (XIII) son números reales diferentes: $k_1 \neq k_2$.

Entonces $y_1 = e^{k_1 x}$ u $y_2 = e^{k_2 x}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (XI), y su solución general es

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};} \tag{XIV}$$

2) L a s r a í c e s d e l a e c u a c i ó n (XIII) s o n r e a l e s e i g u a l e s: $k_1 = k_2$.

En este caso una solución particular es $y_1 = e^{k_1x}$. Como segunda solución particular puede tomarse $y_2 = xe^{k_1x}$, lo cual se demuestra en los cursos detallados de análisis.

Las soluciones $y_1 = e^{k_1x}$ e $y_2 = xe^{k_1x}$ son linealmente independientes, puesto que $\frac{y_2}{y_1} = x \neq$ const. Por esto, la solución general de la ecuación (XI) es, según el teorema 3,

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_1x}, \quad \text{o} \quad y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x); \qquad \text{(XV)}$$

3) las raíces de la ecuación (XIII) son complejas:

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta.$$

En los cursos detallados de análisis se demuestra que la solución general de la ecuación (XI) es en este caso la siguiente:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x); \qquad \text{(XVI)}$$

4) las raíces de la ecuación (XIII) son imaginarias puras:

$$k_1 = \beta i, \quad k_2 = -\beta i$$

Esto sucede en el caso en que $p = 0$ y $q = -\beta^2 i^2 = \beta^2$. La solución general es, en este caso,

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x. \qquad \text{(XVII)}$$

5º. E j e m p l o s. 1) Resolver la ecuación $y'' + 2y' - 3y = 0$.
S o l u c i ó n. La ecuación característica de la ecuación dada es

$$k^2 + 2k - 3 = 0.$$

Sus raíces son: $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$; $k_1 = 1$. $k_2 = -3$, es decir, las raíces son números reales diferentes. La solución general es (XIV)

$$y = C_1e^x + C_2e^{-3x}.$$

2) Resolver la ecuación $y'' - 6y' + 9y = 0$.
S o l u c i ó n. La ecuación característica es

$$k^2 - 6k + 9 = 0, \quad \text{o} \quad (x-3)^2 = 0, \; k_1 = k_2 = 3.$$

La solución general es (XV):

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2x).$$

3) Resolver la ecuación $y'' + 4y' + 13 = 0$.
S o l u c i ó n. La ecuación característica es:

$$k^2 + 4k + 13 = 0, \text{ sus raíces son } k_{1,2} = -2 \pm 3i,$$

es decir, las raíces son complejas, y además $\alpha = -2$, $\beta = 3$. La solución general es:

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x).$$

4) Un punto material de masa m está colgado de un resorte (fig. 167). Si se desplaza un poco el punto hacia abajo, y luego se le suelta, éste comenzará a efectuar oscilaciones rectilíneas. La fuerza bajo cuya acción se efectúan las oscilaciones es, como muestran los experimentos, proporcional al desplazamiento s y está dirigida en sentido contrario a éste. Hallar la ley del movimiento (despreciar la resistencia del aire).

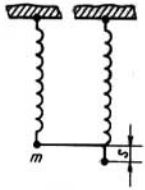


Fig. 167

Solución. Según la ley de Newton la fuerza, bajo cuya acción se efectúa el movimiento, es igual a $m\frac{d^2s}{dt^2}$. Por hipótesis, la fuerza es proporcional al desplazamiento s y está dirigida en sentido contrario a éste, es decir, es igual a $-ks$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. Por lo tanto, se tiene la siguiente ecuación diferencial del movimiento del punto material suspendido:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -ks, \quad \text{o bien} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{k}{m}s.$$

Para destacar que $\frac{k}{m} > 0$, hagamos $\frac{k}{m} = \omega^2$. Entonces, se tiene

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0,$$

que en una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden (donde $y = s$ y $x = t$). Su ecuación característica

$$k^2 + \omega^2 = 0$$

tiene raíces imaginarias puras $k_{1,2} = \pm\omega i$. La solución general es

$$s = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t.$$

Introduzcamos otras constantes arbitrarias A y ω_0, haciendo

$$C_1 = A \operatorname{sen} \omega_0 \quad \text{y} \quad C_2 = A \cos \omega_0.$$

Entonces

$$s = A \operatorname{sen} \omega_0 \cos \omega t + A \cos \omega_0 \operatorname{sen} \omega t = A(\operatorname{sen} \omega t \cos \omega_0 + \cos \omega t \operatorname{sen} \omega_0),$$

$$s = A \operatorname{sen}(\omega t + \omega_0), \quad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Como se ve, el punto material efectúa oscilaciones armónicas con amplitud A y fase inicial ω_0 *.

* Para la verificación, véase el ejemplo 2 del § 95.

D. SUPLEMENTOS

CAPITULO XIII

DERIVACION DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 144. Derivadas parciales y diferenciales parciales. La diferencial total y su aplicación

1°. Si una magnitud depende no sólo de una variable independiente u, sino de dos o más, se llama función de dos argumentos x e y. Por ejemplo, el volumen de un gas es una función de dos variables: de la temperatura y de la presión; la cantidad de calor que se desprende de un conductor es una función de tres argumentos: de la intensidad de la corriente, de la resistencia del conductor y del tiempo.

Supongamos que u es una función de varios argumentos, de tres, por ejemplo:

$$u = f(x, y, z).$$

Demos a una cualquiera de las variables independientes, por ejemplo a x, un incremento Δx, conservando constantes los demás argumentos, con lo que u recibirá un nuevo valor:

$$u + \Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z).$$

Restando del segundo valor de la función el primero, obtendremos el incremento parcial de la función u con respecto a x:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z).$$

El límite de la razón del incremento parcial de la función u con respecto a x, relativa al incremento Δx al tender éste a cero, se llama *derivada parcial de u con respecto a x* y se designa por $\frac{\partial u}{\partial x}$ o u'_x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Análogamente, si consideramos a y variable independiente, y a x y z, constantes, *la derivada parcial de u con respecto a y es*:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y, z)-f(x, y, z)}{\Delta y};$$

la derivada parcial de u con respecto a z es:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\lim_{\Delta z=0}\frac{f(x, y, z+\Delta z)-f(x, y, z)}{\Delta z}.$$

2°. Las derivadas parciales se hallan por medio de las fórmulas y reglas de derivación de la función de un argumento (capítulo VII), porque al hallar la derivada parcial con respecto a x, u se considera como función de un solo argumento x, y con respecto a y se considera como función de un solo argumento y, etc.

Ejemplo. $u = x^2y^3z^4$, hállense las derivadas parciales con respecto a x, y y z.

Solución. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3z^4$ (x es variable; y y z son constantes);

$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^3z^4$ (y es variable; x y z son constantes);

$\frac{\partial u}{\partial z} = 4x^2y^3z^4$ (z es variable; x e y son constantes).

Tengamos en cuenta que $\frac{\partial u}{\partial x}$ es un símbolo conjunto y no una razón

3°. El producto de la derivada parcial de una función con respecto a cierta variable, por ejemplo a x, por la diferencial de esta variable dx, se llama *diferencial parcial de la función* con respecto a esta variable.

La diferencial parcial de la función u con respecto a la variable x se designa por medio del símbolo d_xu. Según la definición:

$$d_xu=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx,$$

$$d_yu=\frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy;\ \text{etc.}$$

4°. En los suplementos del análisis, a menudo es necesario determinar el incremento de una función, dependiente del incremento de todas sus variables independientes. El incremento de la función u y la suma de los incrementos parciales con respecto a todos sus argumentos son diferentes. Por ejemplo, la función $u = xy$ tiene los incrementos parciales $\Delta_x u$ y $\Delta_y u$, rayados en la figura 168, y el incremento total Δu se diferencia de la suma $\Delta_x u + \Delta_y u$ en la magnitud $\Delta x \cdot \Delta y$.

Para el cálculo aproximado del incremento de la función $u = f(x, y)$, se emplea la fórmula:

$$\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy.$$

En los cursos superiores de análisis se demuestra que si la función $u = f(x, y)$ está definida para $a < x < b$, $c < y < d$, tiene derivadas paciales respecto a x e y, y estas derivadas parciales son funciones continuas en el punto (x, y)*, el incremento Δu se diferenciará de la suma $\frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy$ en una infinitésima de orden superior a $|\Delta x| + |\Delta y|$.

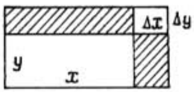


Fig. 168

En estas condiciones, la suma $\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ se llama *diferencial total de la función u* y se designa por medio de du.

Se ve, pues, que representa la suma de las diferenciales parciales de la función u, que posee las condiciones señaladas, tomadas con respecto a todas sus variables independientes:

$$\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy} \qquad \text{(I)}$$

El concepto de la diferencial total puede hacerse extensivo también a una función que tenga más de dos variables independientes.

5°. **Ejemplo.** Hállase la diferencial total de la función

$$u = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}.$$

---

* La función $u = f(x, y)$ se llama continua en el punto (x, y), si a los incrementos infinitesimales Δx y Δy de los argumentos x e y les corresponde el incremento infinitesimal de la función

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y).$$

S o l u c i ó n. Derivando con respecto a x, se tiene:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Derivando con respecto a y, se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

La diferencial total:

$$du=\frac{y\,dx}{x^2+y^2}-\frac{x\,dy}{x^2+y^2}=\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}.$$

6°. E j e m p l o. Hállense los incrementos exacto y aproximado del volumen de una cisterna cilíndrica al aumentar su radio desde 2 hasta 2,01 metros, y la altura desde 4 hasta 4,02 metros.

Si la cisterna se ha fabricada del acero en chapas del espesor de 1 cm, este problema puede formularse aun así; al conocer las dimensiones interiores de la cisterna $r = 2$m y $h = 4$m, determinar cantidad de chapas de acero que necesita para su fabricación.

S o l u c i ó n. Designemos el volumen de la cisterna por medio de u, el radio por medio de x y la altura por medio de y. En ese caso, $u = \pi x^2 y$ es una función de dos variables, y la variación exacta del volumen:

$$\Delta u=\pi 2{,}01^2\cdot 4{,}02-\pi\cdot 2^2\cdot 4=\pi\,(16{,}241202-16)=0{,}241202\pi.$$

El valor aproximado de la magnitud de la variación del volumen:

$$du=2\pi xy\,dx+\pi x^2\,dy=\pi\,(2\cdot 2\cdot 4\cdot 0{,}01+2^2\cdot 0{,}02)=0{,}24\pi.$$

La diferencia $\Delta u - du = 0{,}001202$ es muy pequeña. De aquí que la diferencial total de una función se emplee a menudo en los cálculos aproximados de los valores de una función de varias variables.

7°. Supongamos que x, $y \ldots z$ son valores aproximados de los argumentos obtenidos de una medición con errores Δx, Δy, ..., Δz, y que $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, ..., $z + \Delta z$ son sus valores reales. En ese caso x, y, ... z, determinan el valor aproximado de la función u, y $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, ..., $z + \Delta z$ determinan su valor real $u + \Delta u$.

El error absoluto de la función es $|\Delta u|$, y su error relativo, de acuerdo con la determinación señalada del valor de la función, es $\left|\frac{\Delta u}{u}\right|$.

Como en la mayoría de los casos, el cálculo de Δu es una operación matemática difícil de resolver, y como du puede hallarse sin grandes dificultades por medio de las fórmulas de la diferenciación, el error relativo se toma igual a $\left|\frac{du}{u}\right|$.

8°. E j e m p l o. Hállese el error resultante al calcular el volumen de un paralelepípedo rectangular si al medir sus aristas se han cometido pequeños errores.

S o l u c i ó n. Supongamos que al medir el paralelepípedo rectangular se han obtenido las longitudes de las aristas x, y, z, y se han *cometido los pequeños errores* Δx, Δy, Δz. *En consecuencia*, al calcular el volumen resulta un error igual a Δu.

Si los errores Δx, Δy, Δz son suficientemente pequeños, el error del cálculo de Δu se puede considerar aproximadamente igual a du.

Como $u = x \cdot y \cdot z$,

$$du = y \cdot z \cdot dx + x \cdot z\, dy + x \cdot y \cdot dz.$$

Dividiendo cada término por $u = x \cdot y \cdot z$, se tiene:

$$\left|\frac{du}{u}\right| \leqslant \left|\frac{dx}{x}\right| + \left|\frac{dy}{y}\right| + \left|\frac{dz}{z}\right|.$$

Si el error de cada medición no pasa del 1%, por ejemplo, el error cometido al calcular el volumen del paralelepípedo no excederá del 3%.

§ 145. Derivación de la función implícita

1°. Si la dependencia de la función y con respecto al argumento x viene expresada por medio de la ecuación

$$F(x, y) = 0,$$

que no está resuelta respecto a y, se denomina a y función *implícita* de x.

Veamos cómo se puede hallar la derivada de la función implícita y sin resolver la ecuación, suponiendo que en el campo dado de los valores de x, y, exista derivada, lo que se expresa en que puede ser trazada una tangente en el punto x a la curva $F(x, y) = 0$. Consideremos a $F(x, y)$ como una función $u = F(x, y)$, cuyos valores son todos iguales a cero. Hallemos la diferencial total de la función:

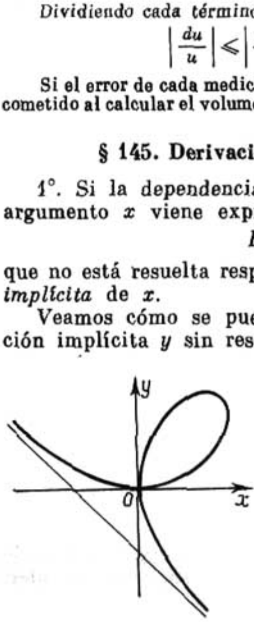


Fig. 169

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = 0,$$

que es igual a cero, porque todos los valores $u = 0$, por lo tanto, todos los valores $\Delta u = 0$. Dividiendo cada término de esta igualdad por dx, se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

De aquí hallamos la derivada $\frac{dy}{dx}$:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}} \tag{II}$$

2°. Ejemplo. Hállese la derivada de la función y, que se determina por medio de la ecuación:

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

Esta ecuación determina la curva llamada hoja de Descartes (fig. 169). Según la fórmula (II), se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{3x^2-3ay}{3y^2-3ax}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

3°. Ejemplo. Hállese la ecuación de la tangente a la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ en el punto } (x_1;\ y_1).$$

Solución. La ecuación de la tangente es:

$$y-y_1=\frac{dy_1}{dx_1}(x-x_1).$$

Hallemos $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ por medio de la fórmula (II), sin resolverla respecto a y:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}}=-\frac{b^2x}{a^2y};\quad \frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

Sustituyendo el valor de $\frac{dy_1}{dx_1}$ en la ecuación de la tangente se halla:

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1),$$

o

$$a^2(yy_1-y_1^2)+b^2(xx_1-x_1^2)=0.$$

Dividiendo cada término por a^2b^2, resulta:

$$\frac{yy_1}{b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{xx_1}{a^2}-\frac{x_1^2}{a^2}=0,$$

de donde:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

y por consiguiente,

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

Esta es la ecuación de la tangente a la elipse.

4°. *La fórmula obtenida (II) de la derivada de una* función implícita de una sola variable puede aplicarse para la determinación de las derivadas parciales de una función implícita de varias variables.

Supongamos, por ejemplo, que la dependencia de la función z de dos argumentos x, y viene expresada por la ecuación

$$F(x, y, z)=0,$$

que no está resuelta respecto a z. En este caso, la función z es una función implícita de dos argumentos x e y; supongamos que esta función tiene derivadas parciales en un campo dado de los valores de x e y.

Suponiendo que y es constante y que x es la variable, según la fórmula (II) resulta:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Suponiendo x constante e y variable, según la misma fórmula (II), resulta:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

CAPITULO XIV

DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIAS

§ 146. Definiciones

1°. *Se llama serie a la expresión:*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots,$$

en la cual u_1, u_2, u_3, ... u_n, ...—llamadas respectivamente primero, segundo, tercero, etc. términos de la serie—son números formados de acuerdo con una regla determinada en dependencia del número del término.

La magnitud del término u_n es función de su número n. Una serie infinita está determinada si se da la fórmula o la regla para encontrar cualquier término de la serie en dependencia de su número. Por ejemplo, una progresión geométrica indefinidamente decreciente está determinada si se conoce su primer término a y la razón q, porque cualquier término enésimo de ella puede averiguarse por medio de la fórmula $u_n = a\cdot q^{n-1}$.

2°. Si sumamos los n primeros términos de la serie infinita $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$, la suma obtenida s_n de los n primeros términos de la serie,

$$s_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n,$$

se llama suma parcial* del número n. La magnitud de la suma parcial cambia en dependencia del valor de n. *Si al crecer indefinidamente el número de términos n, la suma parcial s_n tiene como límite s,*

$$\lim_{n\to\infty} s_n=s,$$

se dice que s es la suma de la serie infinita, y que la propia serie es convergente. Sin embargo, si s_n no tiene límite, la serie se llama divergente.

* O una suma particular del número n.

La serie $a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$, siendo $|q|<1$, es convergente, su suma es $s=\frac{a}{1-q}$, y la llamaremos serie geométrica.

La serie $1+1+1+\ldots+1+\ldots$ es divergente, porque su suma parcial s_n, igual al número de términos n, crece indefinidamente.

La serie $1-1+1-1+1-1+\ldots$ es también divergente, porque s_n es aquí igual a 1 o a 0, y al crecer n indefinidamente, no tiende a un límite.

§ 147. Condición necesaria para la convergencia

1°. Para cualquier serie

$$s_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}+u_n,$$
$$s_{n-1}=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1}.$$

Restando, se tiene: $s_n-s_{n+1}=u_n$.

Si una serie es convergente, al crecer n indefinidamente s_n y s_{n-1} tienden a un mismo número determinado s, a su límite, por lo que su diferencia u_n tiende a cero.

Por lo tanto, para *una serie convergente* se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$

Por eso, *si el término enésimo de la serie no tiende a cero, al crecer n indefinidamente, la serie es divergente.*

2°. Esta condición no es suficiente.

Ejemplo. La serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ se llama armónica. Es evidente que de término enésimo de la serie armónica $\frac{1}{n}$ tiende a cero cuando n crece indefinidamente.

Veamos, sin embargo, cómo esta serie es divergente; para eso la escribimos de nuevo del siguiente modo:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots \tag{1}$$

y tomamos la siguiente serie:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots \tag{2}$$

En la segunda serie, cada suma encerrada en paréntesis es igual a $\frac{1}{2}$ por eso, la segunda serie puede escribirse así:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}+\ldots \tag{3}$$

Al crecer indefinidamente, el número de términos de la serie (3), su suma crece indefinidamente. Los términos correspondientes de la serie armónica son mayores que los términos de la serie (3) o son iguales a ellos, y por eso, la suma de los términos de la serie armónica crece con mayor razón indefinidamente, por lo que la serie armónica es divergente.

§ 148. Convergencia condicional y absoluta

1°. Tomemos la serie:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

Examinemos la suma de los $2n$ primeros términos de ella. Presentemos esta suma como sigue:

$$s_{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) \tag{1}$$

y también así:

$$s_{2n}=1-\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{2n}\right]. \tag{2}$$

Cada diferencia encerrada en paréntesis es positiva.

Por eso, de la (1) se deduce que la suma s_{2n} es positiva y crece al aumentar n; de la (2) se deduce que no es mayor que el primer término, es decir, que 1.

Pero, si la suma parcial, al crecer el número de sus términos, crece y no es mayor que 1, entonces esta suma tiene un límite determinado (§ 57).

Examinemos la suma s_{2n-1} de un número impar de 2_{n-1} términos. Decrece al crecer n. Efectivamente,

$$s_{2n+1}-s_{2n-1}=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}=-\frac{1}{12n(2n+)}<0,$$

Como

$$s_{2n}=s_{2n-1}-\frac{1}{2n}\text{, entonces } s_{2n-1}=s_{2n}+\frac{1}{2n}\,.$$

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} s_{2n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}+s+0=s.$$

De este modo, ambas sumas s_{2n-1} y s_{2n} tienen un mismo límite s para $n\to\infty$; la primera suma tiende a s decreciendo (de la derecha) y la segunda creciendo (de la izquierda). Esta serie es convergente.

Tomemos la serie formada por las magnitudes absolutas de la serie examinada:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$$

Esta serie es armónica y, como se sabe, es divergente. Esto significa que la serie dada es convergente, y la serie formada por las magnitudes absolutas de sus términos es divergente.

2°. Definición. *Una serie se llama condicionalmente convergente si es de por sí convergente, y la serie formada por las magnitudes absolutas de sus términos es divergente.* La serie examinada es condicionalmente convergente.

Una serie se llama absolutamente convergente si es convergente la serie formada por las magnitudes absolutas de sus términos.

La serie dada es convergente si es convergente la serie formada por las magnitudes absolutas de sus términos. En el § 149 se ofrece la demostración.

3°. La serie examinada $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$, es de signos alternos. La serie de signos alternos (serie alternada) tiene la forma:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot u_n+\ldots,$$

en la que los números $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, son positivos.

Criterio de Leibnitz. *Si la magnitud absoluta del término de la serie de signos alternos u_1-u_2+ $+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot u_n+\ldots$ al crecer su número disminuye de tal modo que el $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$, se tiene que la serie es convergente, y la suma de la serie no es mayor que la magnitud del primer término, es decir, $s\leqslant u_1$.* La demostración es análoga a la expuesta en el 1°.

4°. Si despreciamos todos los términos, comenzando de $n+1$. de una serie de signos alternos y aceptamos como suma de la serie infinita la suma parcial s_n, el error absoluto cometido en este caso no supera a la magnitud absoluta de u_{n+1}.

En efecto, dotos los términos despreciados forman una serie infinita de signos alternos, cuyo primer término es u_{n+1}, por eso, la magnitud absoluta de su suma no supera a $|u_{n+1}|$.

§ 149. Principio de comparación y criterio de D'Alembert

1°. Principio de comparación. *Si los términos de la serie $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ no superan por su magnitud absoluta a los términos correspondientes de una serie convergente de términos positivos $v_1+v_2+\ldots+$ $+v_n+\ldots$, la serie dada es absolutamente convergente.*

Esto se deduce con toda evidencia de lo siguiente. Según la condición, todos los términos de la serie $v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+$ $+\ldots$ son positivos. Tomemos una serie formada por las magnitudes absolutas de los términos de la primera serie dada:

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots$$

Todos sus términos son también positivos. Como $|u_n|\leqslant v_n$ cualquiera que sea n, la suma s_n de las magnitudes absolutas de los primeros n terminos de la serie (u) no supera a la suma σ_n de los primeros términos de la serie (v),

$$s_n\leqslant\sigma_n.$$

Según la condición, la serie (v) es convergente, y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma.$$

Al crecer indefinidamente n, la suma s_n de las magnitudes absolutas de los términos de la serie (u) crece sin cesar, pero permanece menor que el número positivo σ, por eso (§ 57, 2°) tiene límite,

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s, \text{ y además } s\leqslant\sigma,$$

esto significa que la serie (u) es absolutamente convergente.

Ejemplo. Demostremos la convergencia de la serie

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$$

D e m o s t r a c i ó n. Cada término de la serie dada no es mayor que el término homónimo de la progresión geométrica indefinidamente decreciente:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

por eso, la serie dada es convergente, puesto que es convergente la serie geométrica.

2°. Demostremos que *la serie dada es convergente si es convergente la serie formada por las magnitudes absolutas de sus términos.*

Supongamos que la serie.

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots, \tag{1}$$

cuyos términos son positivos unos y negativos otros, es absolutamente convergente. Formemos dos series nuevas: una con los términos positivos de la serie dada,

$$u'_1+u'_2+u'_3+\ldots+u'_n+\ldots, \tag{2}$$

y la segunda con las magnitudes absolutas de los términos negativos de la serie dada

$$u''_1+u''_2+u''_3+\ldots+u''_n+\ldots \tag{3}$$

Cada una de estas dos series es convergente, porque sus términos no son mayores que los términos correspondientes de la serie convergente:

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots,$$

formada con las magnitudes absolutas de la serie dada (1).

La suma de la serie dada (1) es igual a la diferencia de las sumas de las series (2) y (3).

3°. *El criterio de D'Alembert consiste en lo siguiente**: *si* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$, *la serie es convergente, y además absolutamente convergente, y si* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$, *la serie es divergente.*

Queda sin resolver la cuestión de la convergencia de una serie si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$, *en este caso, la serie puede ser tanto convergente como divergente.*

E j e m p l o. La serie $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\ldots$ es convergente, porque $\lim\limits_{h\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{h\to\infty}\left|\frac{1}{n}\right|=0.$

4°. Hagamos constar que el principio de comparación y el criterio de D'Alembert son *condiciones suficientes para*

* Aquí se da el criterio sin demostración,

que una serie sea absolutamente convergente, es decir, si se cumplen esas condiciones se puede deducir que la serie es absolutamente convergente, pero no son condiciones necesarias, pero no son condiciones necesarias de la convergencia absoluta de una serie, y pueden existir series absolutamente convergentes para las cuales no se cumplen dichas condiciones.

§ 150. Serie de potencias y criterio de su convergencia

1°. Definición. *Se llama serie de potencias a la serie de la forma:*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

en la que a_0, a_1, a_2, ..., a_n son números constantes, llamados coeficientes de la serie.

Se considera dada una serie de potencias si se conoce la sucesión de sus coeficientes.

2°. Para una serie de potencias pueden darse uno de los tres casos siguientes.

1. La serie de potencias es divergente para todos los valores de x (menos $x=0$) y es convergente cuando $x=0$. Por ejemplo, la serie

$$1 + 1\cdot x + 1\cdot 2\cdot x^2 + 1\cdot 2\cdot 3^3 + \ldots + 1\cdot 2\cdot 3 \ldots nx^n + \ldots$$

es divergente para todos los valores de x, menos el valor $x=0$, porque según el criterio de D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}|nx| = \infty.$$

Para el valor $x=0$, todos los términos de la serie de potencias dada son iguales a cero, menos el primero a_0, y por lo tanto, la serie es convergente.

2. La serie de potencias es absolutamente convergente para todos los valores de x. Por ejemplo, la serie

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} + \ldots$$

es absolutamente convergente para todos los valores de x sin excepción, porque según el criterio de D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x\cdot\frac{1}{n}\right| = 0.$$

3. La serie de potencias es convergente para unos valores de x y divergente para otros. Por ejemplo, la serie

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

si $|x|<1$ es convergente, y si $|x|\geqslant 1$ es divergente, porque en el primer caso constituye una progresión geométrica indefinidamente decreciente, y en el segundo caso, la suma de sus términos crece indefinidamente.

3°. Criterio de convergencia de una serie de potencias. *Si una serie de potencias es convergente para cierto valor $x=x_0\neq 0$, entonces es absolutamente convergente para cualquier otro valor x, cuyo valor absoluto es menor que el valor absoluto de x_0,* o *sea,*

$$|x|<x_0|^*$$

4°. Tengamos presente que si existe un valor $x=x_0$, para el cual es divergente la serie, ésta es también divergente para cualquier valor de x para el cual $|x|>|x_0|$. En efecto, si la serie fuera convergente para tal valor de x, según el principio de la convergencia tendría que ser también convergente para el valor x_0, que por su magnitud absoluta es menor que x.

§ 151. Derivación de una serie de potencias

Supongamos que la serie de potencias $a_0+a_1x+a_2x^2+$ $+a_3x^3+\ldots$ es convergente para el valor $x=x_0$. Según lo expuesto anteriormente, es también convergente para cualquier otro valor de x, para el cual $|x|<|x_0|$ y en ese caso, a cada valor de x en el intervalo $0\leqslant|x|<|x_0|$ así como para $x=x_0$, corresponde un valor determinado de la suma de la serie. Por eso, la suma de la serie es función de x, que designamos $f(x)$,

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots a_nx^n+\ldots$$

En la teoría de las series se demuestra que *cualquier función $f(x)$, expresada por una serie de potencias*

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

tiene en el intervalo de convergencia derivadas de cualquier orden, que pueden obtenerse derivando cada término

---

* Damos este criterio sin demostración.

de la serie dada.

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots;$$
$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots;$$
$$f''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+\ldots+(n-1)n\cdot a_nx^{n-2}+\ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(k)}(x)=1\cdot 2\ldots ka_k+2\cdot 3\ldots(k+1)a_{k+1}x+\ldots+$$
$$+(n-k+1)(n-k+2)\ldots na_nx^{n-k}+\ldots, \text{ etc.}$$

§ 152. Serie de Maclaurin

1°. Supongamos que la función $f(x)$ viene expresada por una serie de potencias $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$, es decir

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

Esta serie será determinada si se conocen sus coeficientes. Para determinar los coeficientes se deriva la serie dada:

$$f'(x)=1\cdot a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots;$$
$$f''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+\ldots+(n-1)\cdot n\cdot a_nx^{n-2}+\ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(k)}(x)=1\cdot 2\ldots ka_k+2\cdot 3\ldots(k+1)a_{k+1}x+\ldots+$$
$$+(n-k+1)(n-k+2)\ldots na_nx^{n-k}+\ldots$$

Suponiendo en estas series que $x=0$, se tiene:

$$f(0)=a_0,$$
$$f'(0)=a_1,$$
$$f''(0)=1\cdot 2\cdot a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(k)}(0)=1\cdot 2\cdot 3\ldots k\cdot a_k, \text{ etc.}$$

De estas igualdades se deducen los coeficientes de la serie de potencias:

$$a_0=f(0),$$
$$a_1=\frac{f'(0)}{1},$$
$$a_2=\frac{f''(0)}{1\cdot 2},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Por lo tanto, si la función $f(x)$ viene expresada por una serie de potencias, esta serie es solamente una, precisamente la serie:

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{x}{1}\cdot f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(0)+\ldots+ \\ +\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^{(n)}(0)+\ldots}$$

A esta serie se le llama serie de Maclaurin.

2°. Ejemplo. Fórmese la serie de Maclaurin para la unción e^x.

Solución. Suponiendo $f(x)=e^x$ y derivando, resulta

$$f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=c^x,\ \ldots$$

Si $x=0$, se tiene:

$$f(0)=e^0=1 \text{ y también } f'(0)=f''(0)=\ldots= \\ =f^{(n)}(0)=\ldots=e^0=1.$$

La serie de Maclaurin se convierte en la serie:

$$1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}+\ldots$$

Como se ha indicado en el § 150, esta serie es convergente para todos los valores de x sin excepción.

3°. No todas las funciones pueden ser desarrolladas en serie de Maclaurin. Tomemos, por ejemplo, la función $f(x) = \ln x$. Esta función puede ser derivada cuantas veces se quiera: $f'(x)=\frac{1}{x}$; $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'''(x)=\frac{2}{x^3}$, etc. Para todos los valores de x diferentes de cero, la propia función y todas sus derivadas tienen valores numéricos determinados, pero cuando $x = 0$ no existen valores numéricos determinados para los coeficientes de la serie, por lo que es imposible desarrollar $\ln x$ en serie de Maclaurin.

§ 153. Serie de Taylor

Muy a menudo no se desarrolla la función $f(x)$ en serie de potencias de x, sino en serie de potencias de la diferencia $x - a$, en la que a es cierto número constante para el cual la misma función y todas sus derivadas son números determinados.

Designemos $x-a$ por medio de h:

$$x-a=h,$$

en ese caso:

$$x=a+h,$$
$$f(x)=f(a+h).$$

Como el número a es invariable, h es una variable nueva, y por ello, $f(x)$ es una función de h, que designamos por medio de $\varphi(h)$:

$$\varphi(h)=f(a+h).$$

Derivando esta igualdad, se halla:

$$\varphi'(h)=f'(a+h), \quad \varphi''(h)=f''(a+h), \ \dots$$
$$\varphi^{(n)}(h)=f^{(n)}(a+h).$$

Para $h=0$ se tiene que

$$\varphi(0)=f(a),$$
$$\varphi'(0)=f'(a),$$
$$\varphi''(0)=f''(a),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\varphi^{(n)}(0)=f^{(n)}(a), \text{ etc.}$$

Escribamos la serie de Maclaurin para la función $\varphi(h)$:

$$\varphi(h)=\varphi(0)+\frac{h}{1}\cdot\varphi'(0)+\frac{h^2}{1\cdot 2}\varphi''(0)+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}\varphi'''(0)+\dots+$$
$$+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}\varphi^{(n)}(0)+\dots$$

Pero

$$\varphi(h)=f(x), \ h=x-a, \ \varphi(0)=f(a), \ \varphi'(0)=f'(a), \ \dots$$

Haciendo en la serie de Maclaurin la sustitución de acuerdo con estas igualdades, resulta:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\dots+\\ +\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\dots n}f^{(n)}(a)+\dots \end{aligned}}$$

Esta es la serie de Taylor. La serie de Maclaurin es una forma particular de esta serie para $a=0$.

§ 154. Convergencia de las series de Taylor y de Maclaurin

1°. Al desarrollar la función $f(x)$ en una serie es necesario saber si es convergente la serie dada a la función $f(x)$, es decir *si $f(x)$ es límite de la suma parcial s_n de los n primeros términos de la serie al crecer n indefinidamente.*

Al designar la suma de todos los términos de la serie a partir del $n+1$ por medio de R_n, resulta que $f(x) = s_n + R_n$.

Suponiendo que $f(x) = s_n + R_n$, resulta

$$f(x) = \lim s_n, \text{ si } \lim R_n = 0, \text{ es decir,}$$

si para los valores examinados de x, R_n tiende a cero al crecer n indefinidamente, $f(x)$ es la suma de la serie para estos valores de x.

Si para los valores examinados de x, tiende R_n a un límite distinto de cero, la serie es convergente, pero no a la función $f(x)$, y si R_n no tiende a ningún límite o crece indefinidamente, la serie es divergente.

2°. Los matemáticos Langrange, Cauchy y otros hallaron la expresión para R_n en dependencia de n.

Según Lagrange,

$$R_n = \frac{x^n}{1\cdot 2 \ldots n} \cdot f^{(n)}(\xi), \text{ (para la serie de Maclaurin)}$$

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots n} \cdot f^{(n)}(\xi), \text{ (para la serie de Taylor),}$$

donde ξ es cierto número intermedio entre 0 y el valor de x para la serie de Maclaurin, y entre a y el valor de x para la serie de Taylor.

La fórmula no ofrece un valor determinado de ξ, circunstancia por la cual resulta difícil su empleo.

3°. En la práctica del desarrollo de las funciones en serie se aplica la siguiente regla: *si en el intervalo $|x| < |x_0|$ las derivadas de todos los órdenes de la función $f(x)$ son por su valor absoluto menores que cierto número positivo M, la serie de Maclaurin es en este intervalo convergente a la función dada.*

D e m o s t r a c i ó n. Según la condición,

$$|f^{(n)}(x)| < M.$$

Sustituyendo en la fórmula de R_n la derivada por el número M, se tiene:

$$|R_n| < M \cdot \frac{|x^n|}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}.$$

Tomemos la serie cuyo término general es el segundo miembro de esta desigualdad:

$$M + M\frac{|x|}{1} + M\frac{|x^2|}{1 \cdot 2} + M\frac{|x^3|}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + M\frac{|x^n|}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots$$

Sacando el factor común fuera de paréntesis, se deduce (§ 150) que la serie es convergente, por lo que su término n—ésimo

$$M\frac{|x^n|}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

tiende a cero. De ahí $R_n \to y$ la serie es convergente a la función dada.

E j e m p l o. Para cualquier valor de $x =$ a la derivada de todos los límites de la función e^x es igual a e^x, es decir, no es mayor que e^a. Por esto la serie de Maclaurin, formada para la función e^x,

$$1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \ldots$$

es convergente para cualesquier valores de x. Por lo tanto

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \ldots$$

§ 155. Ejemplos de desarrollo de funciones en serie de potencias de x. Serie binómica

1°. D e s a r r o l l o de sen x.

Suponiendo $f(x) = \operatorname{sen} x$, se tiene

$$f'(x) = \cos x,$$
$$f''(x) = -\operatorname{sen} x,$$
$$f'''(x) = -\cos x,$$
$$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x, \text{ etc.}$$

Si $x = 0$, se tiene: $f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$; $f'(0) = \cos 0 = 1$; $f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$; $f'''(0) = -\cos 0 = -1$; $f^{IV}(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$, etc.

La serie de Maclaurin se escribirá así:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{sen} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\ldots7} + \ldots + \\ + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{1\cdot2\cdot3\ldots(2n-1)} + \ldots\end{aligned}} \qquad (1)$$

Como para todos los valores de x las derivadas no son mayores que 1, la serie (1) es convergente a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ para todos los valores de x.

2°. Desarrollo de $\ln(1+x)$.

Suponiendo $f(x) = \ln(1+x)$, se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{1\cdot2}{(1+x)^3},$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{1\cdot2\cdot3}{(1+x)^4}, \ \ldots$$

$$\ldots f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)}{(1+x)^n}, \ \ldots$$

Para $x=0$, se tiene:

$$f(0) = \ln 1 = 0, \ f'(0) = 1, \ f''(0) = -1,$$
$$f'''(0) = 1\cdot2, \ f^{IV}(0) = -1\cdot2.3, \ \ldots, \ f^{(n)}(0) =$$
$$= (-1)^{n-1}\cdot1\cdot2\cdot3\ldots(n-1), \ \ldots$$

La serie de Maclaurin se escribirá así:

$$\boxed{\begin{aligned}\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \\ + (-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} + \ldots\end{aligned}} \qquad (2)$$

Para determinar el intervalo de convergencia de esta serie se le aplica el criterio de D'Alembert. Fijemos el valor arbitrario de x

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|x\cdot\frac{n}{n+1}\right| =$$
$$= |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = |x|\cdot1 = |x|.$$

Aquí $|x|$ está sacado fuera del signo límite pues x es una magnitud constante, número fijo.

Así, para que la serie de Maclaurin sea convergente, es suficiente, según el criterio de D'Alembert, que sea cierta la desigualdad $|x| < 1$.

Tengamos presente que si $x = 1$, el desarrollo de $\ln(1 + x)$ se convierte en la serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$, que es convergente (§ 148). Para $x = -1$, el desarrollo se convierte en la serie $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots$, que es divergente, porque constituye una serie armónica multiplicada por -1.

Así pues, la serie (2) es convergente en el intervalo $-1 < x \leqslant +1$. En este intervalo $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

3°. S e r i e b i n ó m i c a. Tenemos $f(x) = (1 + x)^m$. Derivando se tiene:

$$f'(x) = m(1 + x)^{m-1},$$
$$f''(x) = m(m-1)(1 + x)^{m-2},$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1 + x)^{m-3}, \text{ etc.}$$

Para $x = 0$, hallamos: $f(0) = 1$, $f'(0) = m$, $f''(0) = m(m-1)$, $f'''(0) = m(m-1)(m-2)$, etc.

La serie de Maclaurin se escribirá así:

$$\boxed{\begin{aligned}(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots\end{aligned}} \qquad (3)$$

Esta serie se llama s e r i e b i n ó m i c a. Será serie infinita solamente en el caso de que m no sea un número natural ni cero, porque solamente en este caso ni uno solo de los factores m, $(m - 1)$, $(m - 2)$, $(m - 3)$ ... se convierte en cero.

Determinemos el intervalo de convergencia de la serie aplicando el criterio de D'Alembert.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3(n-1)n}\times\right.$$
$$\left.\times x^n : \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}x^{n-1}\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}x\right| = |x|\cdot\left|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m+1}{n} - 1\right|\right| = |x|$$

$\left(\text{como al ser } m \text{ constante y } n \to \infty \text{ el límite de } \frac{m+1}{n}\right.$ es igual a cero, se tiene

$$\left.\lim_{n\to\infty}\left|\frac{m+1}{n}-1\right|=1\right).$$

Para que sea convergente la serie (3) es suficiente, según el criterio de D'Alembert, que será cierta la desigualdad $|x|<1$. Por lo tanto, la serie binómica es convergente para los valores de x, para los cuales $|x|<1$, y puede aplicarse para todos los valores de x cuya magnitud absoluta no supere a 1. En este caso, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

Examinemos los casos particulares de la serie binómica.

1. Suponiendo $m = -1$, se tiene

$$(1+x)^{-1}=1+(-1)x+\frac{(-1)\cdot(-2)}{1\cdot 2}x^2+\\+\frac{(-1)(-2)(-3)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots,$$

o

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots$$

2. Suponiendo $m=\frac{1}{2}$, se tiene

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}x^2+\\+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots,$$

o

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\ldots$$

3. Aplicando el desarrollo expuesto al ser $m=-\frac{1}{2}$, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\ldots$$

4. Si el exponente m es un número natural, por ejemplo $m = 4$, se tendrá que $m - 4 = 0$, y por eso, todos los términos de la serie que contiene este factor serán nulos, y la serie resultará finita.

En efecto, si $m = 4$:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4.$$

Cada término sucesivo se convierte en cero, porque contiene el factor $m - 4 = 0$.

La serie obtenida es la fórmula del binomio de Newton, estudiada en el álgebra.

§ 156. Aplicación de las series a los cálculos

1°. *Cálculo del número e.* En el desarrollo de la función e^x (§ 152)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} + \ldots$$

suponemos $x = 1$, con lo que

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} + \ldots$$

Esta es la fórmula para e expuesta en el § 88. Aplicando esta serie se puede hallar el número e con gran precisión tomando un número de términos relativamente pequeño.

Tomando, por ejemplo, los diez primeros términos de la serie, cometemos un error igual a la suma de la serie:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9\cdot 10} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 10\cdot 11} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 10\cdot 11\cdot 12} + \ldots$$

Sacando el primer término de esta serie fuera de paréntesis, se tiene:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9\cdot 10}\cdot\left(1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11\cdot 12} + \frac{1}{11\cdot 12\cdot 13} + \ldots\right).$$

Dentro de los paréntesis, cada factor de los denominadores es mayor que 10. Si lo sustituimos por 10, disminuirán los denominadores, aumentando el valor de los quebrados, y el error será menor que

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9\cdot 10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right)$$

Dentro de los paréntesis se encuentra la suma de una progresión geométrica indefinidamente decreciente, que es igual a:

$$\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}.$$

Por lo tanto, el error es menor que

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots9\cdot10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{9\cdot1\cdot2\cdot3\ldots9}=\frac{1}{3\,269\,920}<0{,}000001.$$

2°. Cálculo de sen x. Si en el desarrollo

$$\operatorname{sen} x=x-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\ldots$$

nos limitamos a la suma de los n primeros términos, el error cometido en este caso no será mayor por su magnitud absoluta que el término siguiente, el de orden $n+1$ (§ 148, 4°).

Calculemos sen 1° y sen 10° con una aproximación hasta de 0,00001. En el desarrollo de sen x se supone que x es el valor del arco expresado en radianes. Para el arco de 1°, $x=\frac{\pi}{180}=0{,}017453$. El segundo término del desarrollo $\frac{x^3}{6}<\frac{(0{,}2)^3}{6}=\frac{0{,}000008}{6}<0{,}000002$. Por eso, todos los términos, a partir del segundo, pueden ser despreciados y los cinco primeros signos de sen 1° se determinan solamente por el primer término de la serie: sen 1° $=0{,}01745$.

Para el arco de 10°, $x=\frac{\pi}{18}=0{,}174533$. En este caso, el segundo término $\frac{x^3}{6}>\frac{(0{,}1)^3}{6}>0{,}001$, y éste ya no se puede despreciar. Pero el tercer término $\frac{x^5}{120}<\frac{(0{,}2)^5}{120}=\frac{0{,}00032}{120}<$ $<0{,}000003$, y los siguientes pueden ser despreciados. De aquí que con una aproximación hasta de 0,00001

$$\operatorname{sen} 10^\circ=x-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}=0{,}174533-0{,}000886=0{,}17365.$$

Es evidente que para un arco mayor, a fin de conseguir la misma aproximación, sería necesario tomar un número mayor de términos.

Nos limitaremos a dos términos de la serie:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6}$$

y hallaremos para qué valores de x es esto admisible, con una aproximación hasta de $\frac{1}{2}\cdot 0{,}00001$. El error cometido en este caso equivale a $\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{x^5}{120}$, que es, en efecto, menor que este término de la serie.

En este caso

$$\frac{x^5}{120} < 0{,}000005; \quad x^5 < 0{,}0006;$$

$$x < \sqrt[5]{0{,}0006} = 0{,}2268, \quad x \approx 13^\circ.$$

En los cálculos no se emplean más de tres términos de la serie, siendo más conveniente aplicar las fórmulas trigonométricas que servirse de un número mayor de términos de la serie.

3°. Cálculo de logaritmos.

Teniendo (§ 155, 2°)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots, \tag{1}$$

y dando a x todos los valores numéricos posibles comprendidos entre 0 y 1, se pueden calcular los logaritmos de todos los números desde 1 hasta 2. Si $x = 1$

$$\ln(1+x) = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

(Esta serie ha sido examinada en el § 148). De este modo, $\ln 2$ puede ser calculado con cualquier aproximación.

Los logaritmos naturales de otros números enteros pueden ser calculados, por ejemplo, del siguiente modo: suponiendo en la fórmula (1)

$$x = \frac{1}{p},$$

obtenemos en el primer miembro de la fórmula (1):

$$\ln(1+x) = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) = \ln\frac{p+1}{p} = \ln(p+1) - \ln p,$$

y en el segundo miembro:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{3p^3} - \frac{1}{4p^4} + \ldots$$

De aquí que

$$\ln(p+1)=\ln p+\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{3p^3}-\frac{1}{4p^4}+\dots$$

Si suponemos $p=2$, hallaremos

$$\ln 3=\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\dots$$

Para calcular los logaritmos se pueden aplicar también otras series, por ejemplo, el desarrollo de $\ln\frac{1+x}{1-x}$. Aquí no nos ocuparemos de esto. Tengamos presente que el cálculo de los logaritmos por medio de una serie es conveniente sólo para los números primos; los logaritmos de los números compuestos se hallan con más sencillez y rapidez aplicando las reglas de los logaritmos.

Por ejemplo:

$$\ln 4=\ln(2^2)=2\cdot\ln 2;\quad \ln 6=\ln(2\cdot 3)=\ln 2+\ln 3.$$

Advirtamos que tratamos del cálculo de los logaritmos *naturales*. Para obtener los logaritmos decimales es suficiente multiplicar los logaritmos naturales por el módulo de la base, es decir, por $\frac{1}{\ln 10}=0{,}4342944819\dots$

§ 157. Ejemplos de desarrollo en serie de potencias de la diferencia $x-a$

1. Desarróllese x^3-3x^2+7x-4 en serie de potencias $x-1$.

Solución. Suponiendo $f(x)=x^3-3x^2+7x-4$, derivamos:

$$f'(x)=3x^2-6x+7,$$
$$f''(x)=6x-6,$$
$$f'''(x)=6,$$
$$f^{IV}(x)=0.$$

Hallamos los coeficientes de la serie de Taylor (§ 153)

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+$$
$$+\frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a)+\dots$$

Para el desarrollo dado, $a=1$. Por eso:

$$f(a)=f(1)=1;\quad f'(a)=f'(1)=4;\quad f''(a)=f''(1)=0;$$
$$f'''(a)=f'''(1)=6;\quad f^{IV}(a)=f^{IV}(1)=0.$$

Todos los coeficientes sucesivos son también iguales a cero. Por eso,

$$f(x)=x^3-3x^2+7x-4=1+4(x-1)+(x-1)^3.$$

2. Desarróllese $\sqrt{x}$ en serie de potencias de la diferencia $x-4$.

Solución. $f(x)=\sqrt{x}$. Derivando $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ y suponiendo $a=4$, hallamos: $f(4)=\sqrt{4}=2$,

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}};\quad f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}.$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4x\sqrt{x}};\quad f''(4)=-\frac{1}{4\cdot 4\sqrt{4}}=-\frac{1}{32}.$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{8x^2\sqrt{x}};\quad f'''(4)=\frac{3}{8\cdot 4^2\sqrt{4}}=\frac{3}{256},\ \text{etc.}$$

Por eso $\sqrt{x}=2+\frac{x-4}{4}-\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(x-4)^3}{512}-\ldots$

Es evidente que por medio de tal serie se puede calcular la raíz con la aproximación que se quiera.

3. Desarróllese $\cos x$ en serie de potencias de la diferencia $x-\frac{\pi}{3}$.

Solución. Derivando $f(x)=\cos x$ y suponiendo $a=\frac{\pi}{3}$, hallamos:

$$f(x)=\cos x;\qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};$$

$$f'(x)=-\operatorname{sen} x;\qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f''(x)=-\cos x;\qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2};$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x; \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \cos x; \qquad f^{\mathrm{IV}}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \text{ etc.}$$

Por eso,

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 - \ldots$$

E. PROBLEMAS Y EJERCICIOS

§ 1. Método de coordenadas

1. Trácense los puntos: a) $(3;\ 4)$, $(-2;\ 5)$, $(-4;\ -1)$ y $(1;\ -7)$, b) $\left(1\frac{3}{5};\ -0{,}8\right)$, $(-0{,}6;\ -1{,}2)$, $\left(-1{,}75;\ \frac{2}{3}\right)$ y $(0{,}7;\ 1{,}1)$.

2. Hállense las coordenadas de un punto situado simétricamente al punto $M\ (5;\ -2)$: a) respecto al eje Ox, b) respecto al eje Oy.

3. Sean las coordenadas de un punto $x=-a$ e $y=b$, ¿cuáles son las coordenadas del punto situado simétricamente al dado: a) respecto al eje de las abscisas, b) respecto al eje de las ordenadas?

4. Los puntos $A\ (2;\ 5)$ y $B\ (-3;\ 2)$ son los extremos del segmento AB. Hállese la longitud de su proyección: a) en el eje de las abscisas, b) en el eje de las ordenadas.

5. Compruébese que los triángulos son isósceles y rectángulos si sus vértices son los puntos: a) $(-3;\ 4)$, $(4;\ 3)$ y $(0;\ 0)$; b) $(-4;\ -2)$, $(-3;\ 5)$ y $(0;\ 1)$.

6. Compruébese que el triángulo con los vértices en los puntos $A\ (-4;\ 3)$; $B\ (0;\ 2)$ y $C\ (2;\ -5)$ es obtusángulo.

7. Determínese la abscisa del punto M, sabiendo que su ordenada es igual a 4, y la distancia desde él hasta el punto $N\ (1;\ -2)$ es igual a 10 unidades de longitud.

8. Hállese en el eje de ordenadas un punto que dista del punto $A\ (-3;\ 1)$ 5 unidades de escala.

9. Hállese en el eje de las ordenadas un punto equidistante del origen de las coordenadas y del punto $(3;\ -5)$.

10. Hállese en el eje de las abscisas un punto equidistante de los puntos $A\ (-1;\ 0)$ y $B\ (7;\ -4)$.

11. Hállese el centro de un exágono regular, conociendo dos de sus vértices adyacentes; $A\ (2;\ 0)$ y $B\ (5;\ 3\sqrt{3})$.

12. Hállese el punto equidistante d tres puntos dados: A (0; —6); B (1; 1) y C (7; —7).

13. Hállese el centro de la circunferencia circunscrita en el triángulo cuyos vértices son los puntos A (4; —2), B (5; —3) y C (—4; —6).

14. Los vértices de un triángulo están situados en los puntos A (1; —5), B (5; 2), C (0; —3). Hállense los puntos medios de sus lados.

15. El segmento, cuyos extremos son A (—2; 3) y B (4; —1), está dividido en tres partes iguales. Hállense las coordenadas de los puntos de división.

16. El segmento, cuyos extremos son A (3; 2) y B (15; 6), está dividido en cinco partes iguales. Hállense las coordenadas de los puntos de división.

17. Hállense los puntos simétricos respecto al origen de coordenadas para los puntos: a) (2; 0), b) (0; —3), c) (2; 5), d) (—3; 1).

18. Del punto A (—3; 1) se ha trazado un segmento al punto B (4; —2). ¿Hasta qué punto es necesario prolongarlo en la misma dirección para que se duplique su longitud?

19. Del punto (0; —1) se ha trazado un segmento al punto (—4; 3). ¿Hasta qué punto es necesario prolongarlo en la misma dirección para que se triplique su longitud?

20. Hállese la longitud de la mediana del lado AC en el triángulo cuyos vértices son A (3; 7), B (—4; 0) y C (1; —4).

21. Hállese el centro de gravedad de un triángulo cuyos vértices son A (1; 4), B (—5; 0) y C (—2; —1).

22. Dado un triángulo cuyos vértices son A (2; 1), B (6; 4) y C (—4; 9), hállese el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A con el lado opuesto BC.

23. Hállense los vértices de un triángulo sabiendo que los puntos medios de sus lados son.

$$M\left(-\frac{1}{2};\, 3\frac{1}{2}\right),\quad N\left(-1\frac{1}{2};\, -2\right) \quad \text{y} \quad P\left(2;\, 1\frac{1}{2}\right).$$

24. Los puntos A (1; 0), B (2; 1) y C (3; —2) son tres vértices sucesivos de un paralelogramo. Hállese el cuarto vértice D.

25. Conociendo dos vértices adyacentes de un paralelogramo (2; 0), (—3; 3) y el punto de intersección de sus diagonales N (—1; 0), hállense los otros dos vértices.

26. En los puntos $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ actúan las fuerzas paralelas P_1, P_2, P_3. Determínense las coordenadas del punto de aplicación de su resultante.

27. Aplíquense las fórmulas obtenidas en el problema anterior para el caso de tres fuerzas $P_1 = 12$ kg, $P_2 = -18$ kg y $P_3 = 6$ kg, aplicadas respectivamente a los puntos $M_1(3; -5)$, $M_2(4; 1)$ y $M_3(6; 0)$, y explíquese el significado del resultado obtenido.

28. ¿Cuál es el ángulo que forma con el eje Ox la recta que pasa por los puntos: a) $M(0; 2)$ y $N(2; 4)$, b) $M(2; 0)$ y $N(-4; 6)$, c) $M(1; -1)$ y $N(3; -1)$?

29. Verifíquese que el cuadrilátero $ABCD$, cuyos vértices son $A(2, 6)$, $B(5; 1)$, $C(-1; -6)$ y $D(-4; -1)$ es un paralelogramo.

30. Verifíquese que en el cuadrilátero $ABCD$, cuyos vértices son $A(2; -5)$, $B(7; -3)$, $C(6; 1)$ y $D(-2; 3)$, las diagonales AC y BD son perpendiculares entre sí.

31. ¿Cómo están relacionados entre si los coeficientes angulares de dos rectas situadas simétricamente respecto: a) al eje Ox, b) al eje Oy?

32. Demuéstrese que la recta que pasa por los puntos $A(-1; 3)$ y $B(5; 6)$ forma con el eje Ox un ángulo igual a la mitad del formado por la recta que pasa por los puntos $C(-3; -2)$ y $D(0; 2)$.

33. Demuéstrese que la línea media de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado.

34. Demuéstrese que en un triángulo rectángulo la longitud de la mediana de la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.

§ 2. La recta

1. Fórmese la ecuación del lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos a) $(0; -4)$ y $(3; 0)$ b) $(-2; 5)$ y $(2; -5)$.

2. Fórmese la ecuación del lugar geométrico de los puntos equidistantes del origen de los ejes de coordenadas y de los puntos a) $(0; 4)$, b) $(5; 0)$.

3. Hállese en la recta $y = 3x - 2$ el punto para el cual: a) la abscisa es igual a 3, b) la ordenada es igual a 13.

4. Se dan las rectas $y = 2x - 1$ y $x + y - 2 = 0$. Compruébese si pasan estas rectas por los puntos $A(1; 1)$, $B(2; 0)$, $C(0; -1)$, $D(-3; 5)$, $E(-2; -5)$ y $0(0; 0)$.

5. Fórmese la ecuación de la recta que corta en los ejes Ox y Oy segmentos iguales respectivamente a: a) 3 y 5; b) -7 y 4.

6. Hállese la ecuación de la recta que corta en el eje Oy un segmento igual a 3, y que forma con el eje Ox un ángulo de: a) 45°, b) 135°, c) 180°.

7. Hállese la ecuación de una recta que corta en la parte negativa del eje Oy a un segmento de 5 unidades de longitud y que forma con el eje Ox un ángulo de: a) 30°, b) 120° y c) 0°.

8. Fórmense las ecuaciones: a) de las bisectrices de los ángulos de las coordenadas, b) de las rectas paralelas al eje Ox, al eje Oy, que pasan por el punto: 1) $(2; -3)$, 2) $(-5; -1)$, 3) $(-3; 0)$, 4) $(0; 4)$.

9. La indicación de un contador de electricidad era de 2,7 kW al conectarlo. Fórmese la ecuación de la recta que representa gráficamente la indicación del contador si la carga es de 5 bombillas de 60 vatios cada una.

10. La fuerza F está aplicada al origen de coordenadas y sus componentes, en los ejes Ox y Oy, son iguales respectivamente a 4 y -3. Hállese la ecuación de la recta por la que va dirigida esta fuerza.

11. ¿Cuál es la línea que sirve de gráfica del movimiento uniforme desarrollado de acuerdo con la ley: $s = vt + s_0$?

12. La gráfica de un movimiento uniforme corta en los ejes Ox y Oy segmentos respectivamente iguales a $-\frac{1}{3}$ y 6. Hállese la velocidad de este movimiento sabiendo que la unidad de escala correspondiente al eje Ox es de un minuto, y al eje Oy, de un metro.

13. Una persona anda por una viga horizontal, que se halla sobre los apoyos A y B. La presión que soporta el apoyo B varía en dependencia de la posición de la persona. Hállese la ecuación de la dependencia de esta presión respecto a la distancia a que se halla la persona del otro apoyo A, dándose los siguientes datos: peso de la viga $P = 120$ kg, longitud de la misma $l = 5$ m, peso de la persona $p = 65$ kg.

14. Se dan las rectas: a) $5x + 12y - 39 = 0$, b) $4y - 3x + 10 = 0$, c) $x - 2y + 3 = 0$, d) $9x + 12y + 10 = 0$. Sin resolver las ecuaciones respecto a y, hállense los coeficientes angulares y los ángulos formados por las rectas con el eje Ox.

15. Redúzcanse a la forma de ecuación con coeficiente angular las ecuaciones de las rectas: a) $x - y + 2 = 0$, b) $2x + y - 1 = 0$, c) $4x - 2y - 1 = 0$, d) $3x + 6y + 2 = 0$, e) $x - 5y = 0$, f) $2y + 3 = 0$.

Escríbanse los valores de los coeficientes angulares y de las ordenadas en el origen de estas rectas.

16. Hállense las interseciones en los ejes de coordenadas de las rectas: a) $3x - 2y - 12 = 0$, b) $y = 2 - 3x$.

17. Trácense las rectas expresadas por las ecuaciones de los problemas № 15 y 16.

18. Investíguese cómo están situadas respecto a los ejes de coordenadas y trácense las siguientes rectas: a) $2y - x = 0$, b) $x - y = 0$, c) $x + y = 0$, d) $x + 1 = 0$, e) $y - 2 = 0$, f) $3x = 0$, g) $4y = 0$.

19. Redúzcanse las ecuaciones de las rectas: a) $2x + 3y - 6 = 0$, b) $y = 3 + 6x$, c) $y = x - 1$ y d) $3x - 2y + 5 = 0$ a la forma de ecuación de la recta en función de las intersecciones sobre los ejes.

20. Hállense los puntos de intersección de las rectas: a) $y = 4 - x$ e $y = 2x + 3$, b) $2x + 3y - 1 = 0$ y $3x - 2y + 5 = 0$, c) $5x + y = 0$ y $10x + 2y - 1 = 0$, d) $x = 0$ e $y = 5$, e) $x = 1$ e $y = 2$, f) $y = -1$ y $x = 2$.

21. Las diagonales de un rombo, iguales a 8 y 6 unidades de escala, son adoptadas respectivamente como eje de las abscisas y eje de las ordenadas. Fórmense las ecuaciones de los lados de este rombo.

22. Fórmense las ecuaciones de las diagonales de un cuadrado, cuyos lados son iguales a a, si dos lados adyacentes coinciden con los ejes de coordenadas y todo el cuadrado está situado en el tercer cuadrante.

23. Una recta corta segmentos iguales en el eje de coordenadas y pasa por el punto $M(3;\ 2)$. Hállese su ecuación.

24. Una recta pasa por el punto $(3;\ 5)$ de tal modo que el segmento de ella situado entre los ejes de coordenadas es dividido en el punto dado por la mitad. Hállese la ecuación de esta recta.

25. Hállese la ecuación de una recta que pasa por el punto $(3;\ 2)$ y forma con el eje Ox un ángulo de: a) $45°$, b) $135°$.

26. Trácense desde el punto $M(6;\ 2)$ unas rectas que formen con el eje Ox un triángulo equilátero.

27. Un rayo de luz va dirigido por la recta $y = \frac{2}{3}x - 4$; al llegar al eje de las abscisas se refleja en él. Determínese el punto de contacto del rayo con el eje y la ecuación del rayo reflejado.

28. Hállese la ecuación de la recta que pasa por los puntos: a) $M_1(-1;\ 2)$ y $M_2(2;\ 1)$, b) $M_1(-3;\ -1)$ y $M_2(-1;\ 3)$, c) $M_1(2;\ 0)$ y $M_2(2;\ -3)$, d) $M_1(-4;\ -3)$ y $M_2(1;\ -3)$.

29. Compruébese si están situados en una misma recta los tres puntos dados:

a) $(-5;\ -3)$, $(-1;\ 1)$ y $(3;\ 5)$;

b) $(-2;\ 1)$, $(0;\ 3)$ y $(3;\ 5)$.

30. ¿Cuál es la ordenada del punto M, si su abscisa es igual a 6 y está situada en una recta junto con los puntos: a) $A(2;\ 3)$ y $B(-1;\ -3)$, b) $A(-6;\ -1)$ y $A(3;\ 2)$?

31. Hállese el ángulo agudo formado por las rectas:

a) $2x+y-1=0$ e $y-3x+1=0$;

b) $x\sqrt{3}-y+2=0$ y $x\sqrt{3}+y-2=0$;

c) $x-y+2=0$ y $2x+3y-1=0$;

d) $2x-y+3=0$ y $4x-2y-3=0$;

e) $x+3y+1=0$ y $3x-y-1=0$.

32. Calcúlense dos coeficientes angulares de las rectas que pasan por los puntos: a) $M_1(1;\ -1)$ y $M_2(3;\ -5)$, b) $M_1(\sqrt{3};\ 5)$ y $M_2(-\sqrt{3};\ -1)$, c) $M_1(-3;\ -2)$ y $M_2(1;\ -2)$.

33. Calcúlense los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son:

a) $A(2;\ 1)$, $B(3;\ 1)$ y $C(1;\ 2)$;

b) $A(0;\ 2)$, $B(2;\ 0)$ y $C(4;\ 2)$.

34. ¿Hay paralelas o perpendiculares entre las rectas representadas por estas ecuaciones:

a) $x-3y+1=0$, $2x-6y+5=0$ e $y=-3x-2$;

b) $2x-y=0$, $x+2y+3=0$ e $y=2x-1$?

35. Tracense por el punto $(3;\ -6)$ rectas paralelas a: a) $y=-2x+3$, b) $y=3x$, c) $y=0$, d) $x=0$.

36. Trácense por el origen de coordenadas las rectas perpendiculares a: a) $x-y=0$, b) $y+2x-3=0$, c) $x-1=0$, d) $2y+1=0$.

37. Trácese por el punto M (1; 2) una paralela a la recta que pasa por los puntos A (2; —3) y B (3; —1).

38. Trácese por el punto M (1; —2) una perpendicular a la recta que pasa por los puntos A (—3; 2) y B (—1; 3).

39. Fórmense las ecuaciones de dos perpendiculares a la recta $2x - y + 5 = 0$, levantadas en los puntos de intersección con los ejes de coordenadas.

40. Fórmense las ecuaciones de la rectas que pasan por el punto (2; 2) y forman un ángulo de 45° con la recta $4x - 5y - 1 = 0$.

41. Trácense rectas por el punto M (3; 5) que formen un ángulo de 45° con la recta $x - y + 7 = 0$.

42. Fórmense las ecuaciones de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles, conociendo el vértice del ángulo recto C (4; —1) y la ecuación de la hipotenusa $3x - y + 5 = 0$.

43. Hállese la ecuación de la recta trazada por el punto que divide el segmento situado entre los puntos A (—2; 3) y B (4; 6), en la razón de 2 : 3, perpendicular a la recta que en los ejes Ox y Oy corta segmentos iguales respectivamente a —3 y 4.

44. Hállese la ecuación de la recta trazada por el punto N, cuyo segmento entre los puntos A (—3; 2) y B (4; 1) se divide en la razón de 3 : 4, y que sea paralela a la recta que pasa por los puntos: (2; —1) y (—3; 0).

45. Trácese por el punto de intersección de las rectas $2x + 5y + 8 = 0$ y $3x - 4y - 11 = 0$ una recta tal que con la recta $4x - y + 3 = 0$: a) sea paralela, b) sea perpendicular, c) forme un ángulo de 45°.

46. Se dan los puntos A (—7; 1), B (3; 6), C (5; 3), D (—5; 8). ¿En qué razón se divide cada uno de los segmentos AB y CD por el punto de su intersección?

47. Trácese por el punto (2; —3) una recta tal que forme con el eje Ox un ángulo que sea el doble que el ángulo formado por la recta $y = \frac{1}{2}x + 3$ y el propio eje.

48. Hállese la base de la perpendicular trazada del punto (—1; 2) a la recta $3x - 5y - 21 = 0$.

49. Hállese la distancia: a) del punto (4; —1) hasta la recta $12x - 5y - 27 = 0$, b) del punto (2; —3) hasta la recta $5x + 12y - 13 = 0$.

50. Hállese la altura del triángulo, si: a) el vértice del triángulo es el punto A (—1; —1), y la base, la recta $4x -$

$-y+3=0$, b) si el vértice del triángulo es el punto (5; -3), y la base, el segmento que une los puntos (0; -1) y (3; 3).

51. Hállese el punto simétrico al punto Q (-2; -9) respecto a la recta $2x+5y-38=0$.

52. Se dan las ecuaciones de las bases de un trapecio: $3x-4y+10=0$ y $6x-8y+15=0$. Hállese la altura.

53. Se da la recta $3x-4y-5=0$. Hállese la ecuación de la recta paralela a la dada, que está a la distancia de dos unidades de ella.

54. Fórmese la ecuación de una recta que pasa por el punto M_0 (x_0; y_0) y es paralela a la recta que une los puntos M_1 (x_1; y_1) y M_2 (x_2; y_2).

55. Desde el punto de intersección de la recta $7x-24y-14=0$ con el eje Ox trácese la bisectriz del ángulo formado por la recta dada con el eje Ox.

56. Se dan dos puntos A (-3; 8) y B (2; 2). Hállese en el eje de las abscisas el punto M, de tal modo que la quebrada AMB tenga la longitud mínima.

57. ¿Cuál es el ángulo que tiene que formar un rayo dirigido al eje Ox desde él punto A (5; 2), para que el rayo reflejado del eje pase por el punto B (-1; 4)?

58. Fórmese la ecuación de la recta que pasa por el punto M_0 (x_0; y_0) y por el punto de intersección de dos rectas: $A_1x+B_1y+C_1=0$ y $A_2x+B_2y+C_2=0$.

59. Se dan las ecuaciones de dos lados de un paralelogramo $x+y-1=0$ y $3x-y+4=0$ y el punto de intersección de sus diagonales N (3; 3). Hállense las ecuaciones de los otros dos lados de este paralelogramo.

60. Determínense los límites de un terreno cuadrado por medio de los siguientes datos:

a) dos postes que se conservan y constituyen los vértices opuestos, estando determinados los postes en el plano por las coordenadas A (2; 1) y C (4; 5);

b) tres postes que se han conservado: uno en el centro y dos en los vértices de uno de sus lados, estando determinados los postes en el plano por las siguientes coordenadas: el del centro N (1; 6) y los laterales A (5; 9) y B (4; 2).

61. Determínese la situación del punto M, si la distancia desde el punto A (1; -2) es igual a 5 unidades de longitud, y la dirección a él desde el punto B (0; -8) forma con la dirección positiva del eje Ox un ángulo cuya tangente es igual a $\frac{1}{2}$.

62. Desde el punto M (9; 5) se han trazado tres perpendiculares a los lados de un triángulo, cuyos vértices son los puntos (8; 8), (0; 8) y (4; 0). Verifíquese que las bases de las tres perpendiculares están situadas en una misma recta, y que el punto M pertenece a la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo dado.

63. Compruébese que el punto de intersección de las alturas de un triángulo está situado en la misma recta que el punto de intersección de sus medianas y el centro de la circunferencia circunscrita. Tómese, por ejemplo, el triángulo ABC: A (5; 8), B (—2; 9) y C (—4; 5).

§ 3. La circunferencia

1. Fórmese la ecuación de una circunferencia que tiene:

a) el centro en el punto (3; —5) y el radio es igual a 4;

b) el centro en el punto (—2; 1) y pasa por el origen de coordenadas;

c) el centro en el punto (—3; 0), y el extremo del diámetro en el punto (2; —4).

2. Fórmese la ecuación de una circunferencia, cuyo diámetro es el segmento de la recta $4x - 3y + 12 = 0$, situado entre los ejes de coordenadas.

3. Escríbase la ecuación de una circunferencia, cuyo centro se encuentra en el eje de las abscisas y pasa por los puntos M (2; 3) y N (5; —2).

4. Escríbase la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas y por el punto M (—3; 9), y tiene el centro en el eje de las ordenadas.

5. Fórmese la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje de las abscisas en el punto A (2; 0) y pasa por el punto M (—1; 3).

6. Fórmense las ecuaciones de las circunferencias que pasan por el punto M (2; —1) y son tangentes a los dos ejes de coordenadas.

7. Hállense las ecuaciones normales de las circunferencias que pasan por los puntos M (—1; 4) y N (3; 0) y las longitudes de sus radios son 4 unidades.

8. Hállense las ecuaciones normales de las circunferencias que pasan por los puntos M (4; —2) y N (5; —3), y las longitudes de sus radios son 5 unidades.

9. Fórmese la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos: a) (0; 0), (7; —7), (8; 0), b) (0; 4), (1; 2), (3; —2).

10. Fórmese la ecuación de la circunferencia circunscrita alrededor del triángulo cuyos vértices están situados en los puntos: A (0; -6), B (1; 1) y C (8; 0).

11. Hállense el centro y el radio de la circunferencia:

a) $x^2+y^2-6y=0$;
b) $x^2+y^2+8x-9=0$;
c) $x^2+y^2-10x+4y+13=0$;
d) $2x^2+2y^2-6x-8y-19=0$;
e) $2x^2+2y^2-5x+3y-7=0$;
f) $x^2+y^2-12x+2y+37=0$;
g) $x^2+y^2-2x+12y+38=0$.

12. Hállese la ecuación de la circunferencia cuyo radio es igual a dos unidades de longitud, y que es concéntrica a la circunferencia $x^2+y^2+6x+8=0$.

13. Hállese la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto M (-3; 4) y es concéntrica a la circunferencia $x^2+y^2+3x-4y-1=0$.

14. Transfórmese la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2+4x-12y-9=0$, trasladando el origen de coordenadas a su centro y conservando la misma dirección de los ejes.

15. Hállense los puntos de intersección con los ejes de coordenadas de cada una de las circunferencias; a) $x^2+y^2-6x-10y+9=0$, b) $x^2+y^2-10x-6y+25=0$.

16. ¿Cuál es la posición relativa de cada una de las rectas: a) $x-2y-5=0$, b) $3x+4y+25=0$, c) $x+y-17=0$ y la circunferencia $x^2+y^2=25$?

17. Hállese el centro de un círculo cuyo radio $r=50$, sabiendo que su circunferencia corta en el eje de las abscisas una cuerda de longitud igual a 28 unidades y que pasa por el punto M (0; 8).

§ 4. La elipse

En los siguientes problemas es necesario formar la ecuación de la elipse si se sabe que:

1. Las coordenadas del foco F y del punto M de la elipse: a) F (± 2; 0) y M (2; -3), b) F (± 15; 0) y M (20, 12), c) F (± 22; 0) y M (13; 12).

2. Los vértices de la elipse son los puntos (± 3; 0) y (0; ± 1).

3. La distancia entre los focos es igual a 16, y el eje mayor, igual a 34.

4. El semieje menor es igual a 4, y la distancia entre los focos, igual a 15.

5. El semieje mayor es igual a 10, y la excentricidad, igual a 0,6.

6. La excentricidad $e = 0{,}28$, y los focos tienen las coordenadas $(\pm 7;\ 0)$.

7. Las distancias desde cada uno de los focos hasta los extremos del eje focal son iguales respectivamente a 18 y 8.

8. El eje menor es igual a 6, y la excentricidad, igual a 0,8.

9. La suma de los semiejes es igual a 8, y la distancia focal es también igual a 8.

10. La excentricidad es igual a $\frac{1}{3}$, y la elipse pasa por el punto $M\ (c;\ 4)$, siendo c la abscisa del foco.

11. La elipse pasa por los puntos: a) $M\ (6;\ 4)$ y $N\ (-8;\ 3)$, b) $M\ (6;\ -6)$ y $N\ (9;\ \sqrt{6})$.

12. Calcúlese la longitud de los ejes, las coordenadas de los focos y la excentricidad de la elipse, conociendo su ecuación: a) $25x^2 + 169y^2 = 4225$, b) $3x^2 + 5y^2 = 30$, c) $2x^2 + y^2 = 32$, d) $9x^2 + 25y^2 = 4$, e) $256x^2 + 81y^2 = 576$.

13. Todas las ordenadas de la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ se han reducido a la mitad. Hállese la ecuación de la curva obtenida.

14. Determínese la excentricidad de la elipse si:

a) su eje menor se ve desde el foco bajo un ángulo recto;

b) la distancia entre los focos es igual a la distancia entre los extremos de los ejes mayor y menor;

c) la ordenada del punto de la elipse, cuya abscisa es la abscisa del foco, forma una $\frac{1}{m}$ parte de la longitud del semieje menor $(m > 1)$.

15. Se da la excentricidad e de una elipse. Hállese la *razón de sus semiejes.*

16. Cualquier meridiano del globo terráqueo tiene la forma de una elipse, siendo la razón de sus ejes $\frac{299}{300}$. Hállese la excentricidad de un meridiano.

17. La órbita del globo terráqueo es una elipse, en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. Conociendo la excentricidad de esta elipse $e = 0{,}017$ y el semieje $a = 150 \cdot 10^6\ km$, hállese en cuándo es menor la distancia mínima desde la Tierra hasta el Sol *(en diciembre) que la distancia máxima* (en junio).

18. En la elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ hállese el punto cuya distancia hasta el foco derecho sea el cuádruplo respecto a la distancia desde este punto hasta el foco izquierdo.

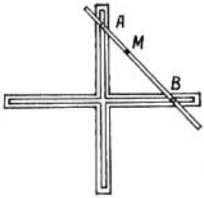


Fig. 170

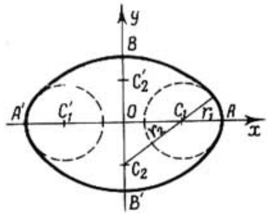


Fig. 171

19. El segmento AB, de longitud constante, se desliza con sus extremos por los lados de un ángulo recto. Tómese en el segmento un punto cualquiera M y demuéstrese que la trayectoria que traza al deslizarse es una elipse.

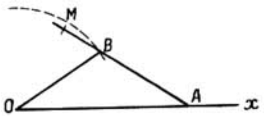


Fig. 172

20. En la figura 170 se representa un compás elíptico, en el que por medio de los tornillos A, B y M se puede variar la longitud de la recta AB que se desliza, y el lugar M en el que se fija el lapicero. ¿Cómo hay que disponer el compás para dibujar las elipses:

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, b) $\frac{x^2}{16}+y^2=1$, c) $x^2+y^2=25$?

21. En la práctica, la descripción exacta de una elipse (§ 23) suele sustituirse por la aproximada, que se traza con un compás. Desde el punto C_1 (fig. 171), con un radio igual a C_1A_1 y desde el punto C_2, con un radio igual a C_2B, se describen unas partes de la circunferencia. Los radios tienen que ser elegidos de tal manera que las dos partes de la circunferencia tengan una tangente común en el punto de unión. Determínese cuál es la dependencia relativa de

los radios $C_1A = r_1$ y $C_2B = r_2$, para que la elipse aproximada tenga los semiejes dados a y b.

22. En la figura 172 se representa un mecanismo en el que $OB = BA = a$, $MB = b$. El punto O está inmóvil, B gira alrededor de él, describiendo una circunferencia, y A se desplaza por la recta Ox. ¿Cuál es la curva que describe el punto M?

§ 5. La hipérbola

En los siguientes problemas es necesario formar la ecuación de una hipérbola, si se sabe que:

1. Las coordenadas, del foco F y del punto M de la hipérbola: a) $F(\pm 13; 0)$ y $M(22; 12)$, b) $F(\pm 15; 0)$ y $M(-20; 12)$, c) $F\left(\pm 4\frac{1}{2}; 0\right)$ y $M\left(10\frac{1}{2}; 8\right)$.

2. Las coordenadas de los vértices $(\pm 1; 0)$ y las coordenadas de los focos $(\pm 3; 0)$.

3. El semieje real es igual a 5 y los vértices dividen por la mitad la distancia entre el centro y el foco.

4. El semieje real es igual a 6, y la excentricidad $e = 1{,}5$.

5. La distancia focal es igual a 26, y la excentricidad igual a 2,6.

6. La excentricidad de la hipérbola es igual a 1,25, y la hipérbola pasa por el punto $(2\sqrt{5}; -1{,}5)$.

7. La hipérbola pasa por los puntos $M(-4; 3)$ y y $N(\sqrt{10}; -1{,}5)$.

8. Hállense las coordenadas de los focos, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas: a) $16x^2 - 9y^2 = 576$, b) $3x^2 - 5y^2 = 30$, c) $64x^2 - 225y^2 = 400$.

9. Hállese la ecuación de la hipérbola para la cual:

a) las asíntotas están representadas por medio de las ecuaciones $y = \pm \frac{1}{2} x$, y los focos tienen las coordenadas $(\pm \sqrt{10}; 0)$;

b) las asíntotas están representadas por las ecuaciones $y = \pm \frac{3}{4} x$, y la hipérbola pasa por el punto $(2{,}1)$.

10. Determínese el ángulo formado por las asíntotas, si la excentricidad $e = 2$.

11. Calcúlese la excentricidad de la hipérbola, si el ángulo formado por sus asíntotas es igual a 60°, a 90°.

12. Hállese la dependencia entre la excentricidad de la hipérbola y el ángulo formado por la asíntota con el eje principal.

13. Hállese la distancia desde un punto situado en la hipérbola $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1$, hasta sus focos, si la abscisa del punto es igual a: a) 15, b) $-16\,\frac{13}{17}$.

14. Hállese en la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ un punto cuya distancia hasta el foco izquierdo es el doble que hasta el derecho.

15. Hállese en la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ un punto $M(x_0, y_0)$ para el cual los radios vectores focales son perpendiculares entre sí.

16. Hállese la ecuación de la hipérbola equilátera que pasa por el punto: a) $(4; -2)$, b) $(-3; \sqrt{2})$.

17. Transfórmense las ecuaciones de las hipérbolas en ecuaciones relativas a las asíntotas: a) $x^2 - y^2 = 12$, b) $x^2 - y^2 = 8$.

18. Transfórmense las ecuaciones de las hipérbolas en ecuaciones relativas a las asíntotas, tomando los ejes de simetría de la hipérbola como ejes de coordenadas:

$$\text{a) } xy = 3, \quad \text{b) } xy = 5.$$

19. Fórmese la ecuación de la hipérbola que tiene los focos comunes con la elipse $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$, suponiendo la excentricidad de la hipérbola igual a 1,25.

20. Fórmese la ecuación de la hipérbola sabiendo que sus vértices están situados en los focos de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, y los vértices de esta elipse se encuentran en los focos de la hipérbola.

21. Calcúlese la longitud del lado de un cuadrado inscrito: a) en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, b) en la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Investíguese en qué hipérbolas se puede inscribir un cuadrado.

22. Fórmense las ecuaciones de dos perpendiculares, bajadas desde el foco derecho de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ a sus asíntotas.

23. Hállense los puntos de intersección de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$ con las rectas: a) $20x + 21y + 12 = 0$, b) $4x - 3y = 0$, c) $y = 2x - 3$.

24. Hállense los puntos de intersección de la hipérbola $2x^2 - y^2 = 4$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.

25. Hállense los puntos de intersección de la elipse $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ con la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

§ 6. La parábola

En los siguientes problemas es necesario formar la ecuación de la parábola que tiene el vértice en el origen de coordenadas, conociendo:

1. Las coordenadas del foco a) (4; 0), b) (0; —3).

2. La ecuación de la directriz es: a) $x = 1$, b) $y = -2$.

3. La parábola es simétrica al eje Ox y pasa por el punto: a) (1; —2), b) (—2; 4).

4. La parábola es simétrica al eje Oy y pasa por el punto: a) (—3; 2), b) (2; —3).

5. Una piedra arrojada al alto, formando un ángulo agudo con el horizonte, describe el arco de una parábola y cae a una distancia de 16 metros. Determínese el parámetro de esta parábola si la altura máxima alcanzada por la piedra es de 12 metros.

6. El espejo del faro de un automóvil tiene la forma de una parábola (su sección). Hállese la ecuación de esta parábola, teniendo en cuenta que el diámetro del faro es de 20 cm, y la profundidad, 15 cm. El eje Ox es el eje del faro. El origen de las ordenadas está situado en la parte profundad del espejo.

7. El espejo parabólico del refractor de un observatorio tiene una distancia focal de 20 metros y un diámetro de 6 metros. Hállese la profundidad de la cavidad parabólica que fue necesario hacer al construir este espejo de un cristal plano.

8. Fórmese la ecuación de la parábola que es:

a) simétrica al eje Ox y que corta en este eje el segmento $+a$, y en el eje Oy, los segmentos $\pm b$ (fig. 173);

b) simétrica respecto al eje Oy y que corta en este eje el segmento $+b$, y en el eje Ox, los segmentos $\pm a$ (fig. 174).

9. La armazón representada en la figura 175 tiene la forma de una parábola.

La longitud de la luz es igual a l, la flecha de la comba es igual a f; la luz está dividida en $2n$ partes iguales. Determínese la longitud de las vigas verticales (y_1, y_2, ...) y las diagonales (d_1, d_2, ... y d'_1, d'_2, ...) de la armazón.

Ejemplo numérico: $l = 20$ m, $f = 5$ m y $n = 4$.

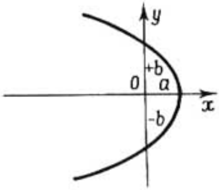


Fig. 173

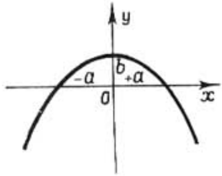


Fig. 174

10. Resuélvase el mismo problema si se trata de una armazón en forma de hoz, formada por dos parábolas (fig. 176).

Ejemplo numérico: $l = 20$ m, $f = 2$ m (la flecha de la comba de la armazón), $f' = 3$ m (la comba de la parábola inferior), $n = 4$.

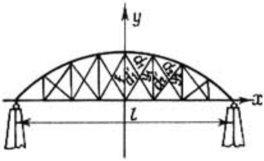


Fig. 175

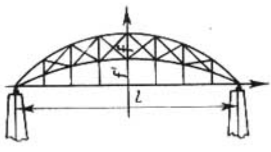


Fig. 176

11. Fórmese la ecuación de la parábola, conociento las coordenadas del vértice O' y del foco F de la parábola: a) O' (2; 3) y F (2; 5); b) O' (3; 0) y F (3; −3); c) O' (1; −2) y F (4; −2); d) O' (2; 0) y F (0; 0).

12. Fórmese la ecuación de la parábola, conociendo la ecuación de la directriz y las coordenadas del vértice O' de la parábola: a) $y = -2$ y O' (4; 1), b) $y = 1$ y O' (3; −1), c) $x = 3$ y O' (1; 1), d) $x = 0$ y O' (−1; 0).

13. Fórmese la ecuación de la parábola, conociendo la ecuación de la directriz y las coordenadas del foco F de la

parábola: a) $x = 0$ y $F(5; 0)$, b) $y = -1$ y $F(2; 3)$, c) $x = 1$ y $F(-2; 2)$.

14. Fórmese la ecuación de la parábola, sabiendo que en ella:

a) el eje es paralelo al eje Oy, el vértice tiene las coordenadas $(2; -1)$ y la parábola pasa por el punto $(4; 0)$; b) el eje es paralelo al eje Ox, el vértice tiene las coordenadas $(2; 3)$ y la parábola pasa por el punto $(1; 1)$.

15. Determínense las coordenadas del vértice, la magnitud del parámetro y la dirección del eje de simetría de las siguientes parábolas:

a) $y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$, b) $y^2 - 6x + 14y + 49 = 0$,
c) $y^2 + 8x - 16 = 0$, d) $x^2 - 6x + 4y - 11 = 0$,
e) $y = x^2 - 8x + 15$, f) $y = x^2 + 6x$,
g) $y = 2x - x^2$, h) $y = x - x^2$.

16. Transfórmense las ecuaciones de las circunferencias: a) $x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$ y b) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 1 = 0$ en ecuaciones canónicas y determínense las coordenadas del centro y del radio.

17. Transfórmense las ecuaciones de las hipérbolas: a) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$ y b) $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$ en canónicas y determínense las coordenadas del centro y las magnitudes de los ejes.

18. a) Hállese en la parábola $y^2 = 4x$ un punto, para el cual el radio vector focal es igual a 17.

b) Hállese en la parábola $y^2 = 8x$ un punto para el cual el radio vector focal es igual a 10.

19. Hállese la ecuación de una cuerda común para la parábola $y^2 = 18x$ y el círculo $(x + 6)^2 + y^2 = 100$.

20. Verifíquese que el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por el punto dado y que son tangentes a la recta dada, es una parábola.

§ 7. Problemas mixtos

1. Demuéstrese que para cada recta que sale del punto $M(x_0; y_0)$ y corta a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, el producto de las distancias desde el punto M hasta los puntos de intersección de la recta con la circunferencia es el mismo (corolario del teorema conocido en la planimetría sobre el producto de una secante por su parte exterior).

2. El vértice del ángulo recto de un triángulo se encuentra en la recta $2x+y-10=0$, y los otros dos vértices, en los puntos $(2; -3)$ y $(4; 1)$. Calcúlese el área del triángulo.

3. Hállese el ángulo formado por las rectas que pasan por el origen de coordenadas y por los puntos que dividen en tres partes iguales la cuerda $2x+3y-12=0$ de la parábola $2x^2-9y=0$.

4. El centro de una circunferencia tangente a los ejes de coordenadas se encuentra en la recta $3x-5y+15=0$. Hállese la ecuación de esa circunferencia.

5. En el primer cuadrante de la elipse $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ se ha tomado un punto, cuya abscisa es igual a $1\frac{2}{5}$, y ha sido unida con los focos de la elipse. Demuéstrese que los radios vectores obtenidos son perpendiculares entre sí.

6. El vértice de una parábola se halla en el centro de una circunferencia, cuyo radio es igual a $\frac{3}{4}$ del parámetro p de la parábola. La cuerda que une los puntos de intersección de ambas curvas sirve de lado de un rectángulo inscrito en la circunferencia. Hállense las longitudes de los lados del rectángulo y las ecuaciones de sus diagonales.

7. Los focos de las elipses $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ y $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ están unidos entre sí por unas rectas, y en el rombo formado de este modo hay inscrita una circunferencia. Hállese la ecuación de esta circunferencia.

8. Una elipse y una hipérbola tienen focos comunes, siendo la distancia que los separa igual a $2\sqrt{13}$; la diferencia entre los semiejes focales es igual a 4, y la razón de las excentricidades, igual a $\frac{3}{7}$. Fórmense las ecuaciones de estas curvas y hállense los puntos de intersección.

9. Se da la hipérbola $x^2-y^2-6x=0$. Hállese la ecuación de la recta que une el centro de la hipérbola con el centro de la circunferencia que pasa por el origen y el punto de intersección de la recta $x-2y+4=0$ con los ejes de coordenadas.

10. Si el origen de coordenadas O sirve de centro a una circunferencia, que es tangente a la recta $3x-y-10=0$, y de vértice de una parábola, cuyo parámetro es igual a $\frac{3}{2}$,

y su eje coincide con el eje Ox, y si desde el punto M de intersección de estas curvas, situado en el primer cuadrante, se traza una circunferencia, tangente al eje Ox, que corta a la primera circunferencia en los puntos P y Q, en ese caso, el punto de intersección de la cuerda PQ con la ordenada del punto M pertenece a una elipse, cuyo eje mayor es el diámetro de la primera circunferencia, y el eje menor es igual al radio de la misma circunferencia. Demuéstrese esto.

§ 8. Teoría de los límites

1. Verifíquese que si x toma uno tras otro los valores: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{8}$; ...; $\frac{2^n-1}{2^n}$ ..., su límite es igual a 1.

2. Verifíquese que el límite de $\cos x$ es igual a cero si $x \to \frac{\pi}{2}$.

3. Verifíquese que $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

4. Verifíquese que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = 1$.

5. Si $x \to 0$, ¿cuáles de estas magnitudes son infinitamente pequeñas: $10x$; x^2; $\sqrt{x}$; ax^2; $\frac{2}{x}$; $\frac{0,001}{x}$; $\frac{x}{x^2}$; $\frac{x^2}{x}$; $x^2+0,1x$; $x-x^2$?

6. Si x toma uno tras otro los siguientes valores: 1; $\frac{1}{2}$; 3; $\frac{1}{4}$; 5; $\frac{1}{6}$; ..., ¿es x una magnitud infinitamente grande o infinitamente pequeña?

Hállense los límites de las siguientes expresiones:

7. $\frac{10}{x+1}$ si $x \to 4$.

8. $\frac{x^2-3x+6}{x+2}$ si $x \to 2$.

9. $\frac{x^2+6x-1}{5x+3}$ si $x \to 0$.

10. $\frac{x^2-1}{x+1}$ si $x \to 1$.

11. $\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$ si $x \to 3$.

12. $\frac{x^3+2x^2}{x^4-x^3+5x^2}$ si $x \to 0$.

13. $\frac{x^3-3x^2+2x}{x^3-4x^2+3x}$ si $x \to 1$.

14. $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$ si $x \to a$.

15. $\frac{x^p-x^q}{x^p-x^q}$ si $x \to 0$ y $p > q$.

16. $\frac{1+x-x^2}{x^2+x-1}$ si $x \to \infty$.

17. $\frac{ax^4+bx^3+cx^2}{kx^4+lx^3+mx^2}$ si $x \to \infty$.

18. $\frac{x^2+5}{2x^3+3}$ si $x \to \infty$.

19. $\frac{ax^2+b}{x^3+c}$ si $x \to \infty$.

20. $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ si $x \to \infty$.

21. $\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}$ si $x \to 1$.

22. $\frac{2x}{x^2-a^2}-\frac{1}{x-a}$ si $x \to a$.

23. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}$ si $x \to 3$, $x \to a$

24. $\sqrt{x^2+1}-x$, donde $x > 0$, si $x \to \infty$.

Explíquese el sentido geométrico.

§ 9. La función y la continuidad de la función

1. Suponiendo $f(x) = 5 + 3x - 5x^2$, hállese $f(-1)$.

2. Suponiendo $\varphi(x) = x^2 - 2$, hállese $\varphi(x) + 4$ y $\varphi(x + 4)$.

3. Dado: $F(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ hállese $F(x - 2)$.

4. Dado: $F(x) = \frac{2x}{5} + \frac{5}{2x}$; verifíquese que $F\left(\frac{5}{2}\right) = -F\left(-\frac{5}{2}\right)$.

5. Dado; $f(x) = \frac{1}{x}$; verifíquese que $f(x + h) - f(x) = -\frac{h}{x^2+xh}$.

6. Hállense los valores de t para los que $f(t) = t^2 + t - 6$ se convierte en cero.

7. Una ecuación con una incógnita tiene la forma $f(x) = 0$. ¿Qué notación debe emplearse para indicar que los números 1 y -2 son raíces de esta ecuación?

8. Suponiendo $f(x) = a^x$, escríbase por medio de este símbolo la igualdad $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

9. Suponiendo $f(x) = \operatorname{tg} x$, escríbase por medio de este símbolo la fórmula $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$.

10. Dado $f(x) = \operatorname{sen} x$, verifíquese que

$$f(x+2z)+f(x)=2\operatorname{sen}(x+z)\cdot\cos z.$$

11. Hállense los campos de determinación de las funciones:

a) $y=\sqrt{4-x^2}$; b) $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}$; c) $y=\sqrt{3+x}+\sqrt{x-1}$; d) $y=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$.

12. Constrúyase la gráfica de las funciones:

a) $y=|x|$ en el segmento $[-2; +2]$;

b) $y=|x-2|$ en el segmento $[-2; +6]$;

c) $y=4x-x^2$ en el segmento $[-1; 4]$;

d) $y=\frac{1}{x-1}$; e) $y=\frac{1}{(x-1)^2}$; f) $y=x+\frac{1}{x}$;

g) $y=\frac{x^2}{x-1}$; h) $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; i) $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$;

j) $y=\begin{cases} x+2, \text{ si } -2\leqslant x\leqslant -1; \\ 1; \text{ si } -1\leqslant x\leqslant +1; \\ 2-x, \text{ si } +1\leqslant x\leqslant +2. \end{cases}$

13. Hállese la magnitud de la variación del volumen de un cubo al variar la longitud x de su arista en Δx. Hágase el cálculo para $x=2$m y $\Delta x=0{,}1$ m.

14. Calcúlese el incremento de la función $y=x^3-2x+5$ al variar el argumento desde $x=2$ hasta $x_1=2{,}01$.

15. Hállese el incremento de la función $y=\frac{2}{x-1}$ si el valor del argumento x es arbitrario y si el incremento Δx es arbitrario.

16. Hállese el incremento de la función $y=\lg x$ para cualquier valor positivo de x si el valor del incremento Δx es arbitrario.

17. Determínense los puntos de discontinuidad de las funciones:

a) $y=\frac{1}{x}$; b) $y=\frac{1}{(x-1)^2}$;

c) $y=\frac{1}{x^2-1}$; d) $y=\frac{x+7}{x^2+10x+21}$;

e) $y=\frac{2x-3}{6x^2-23x+21}$ f) $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

18. *Demuéstrese la continuidad de la función para* cualquier valor real $x=c$:

a) $y=\frac{2x}{x^2+1}$; b) $y=\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$;

c) $y=\cos x$; d) $y=a^x$ $(a>0;\ a\neq 1)$;

e) $y=\log_a x$ $(a>1;\ 0<x<+\infty)$.

19. ¿Será la función propuesta:

$$y = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3 - x, & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 2, \end{cases}$$

continua en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 2$? Constrúyase la gráfica.

20. Demuéstrese la continuidad de $\operatorname{tg} x$ para todos los valores de x, menos $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\,k\pi$, donde k es cualquier número entero.

§ 10. Función derivada

1. Hállese la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para las funciones:

a) $y = 2x^3 - x^2 + 1$ si $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$;

b) $y = \frac{1}{x}$ si $x = 2$; $\Delta x = 0{,}01$;

c) $y = \sqrt{x}$ si $x = 4$, $\Delta x = 0{,}41$.

Verifíquese que al tender Δx a cero, esta razón tiende en el primer caso a 4, en el segundo a $-\frac{1}{4}$ y en el tercero a $\frac{1}{4}$.

2. La ecuación del movimiento de un punto es: $s = t^3 + 10$. Hállese la velocidad del movimiento de dicho punto en el instante $t = 2$.

3. El ángulo φ de giro de una rueda al frenar se determina por medio de la ecuación $\varphi = n + bt - ct^2$, en la que a, b, c son constantes y t es el tiempo. Hállese la velocidad angular en el instante t y determínese cuándo se parará la rueda.

4. Al elevar la temperatura de 1 kilogramo de agua desde 0° hasta $t°$, la cantidad de calor Q requerida se determina por medio de la fórmula:

$$Q = t + \upsilon{,}00002t^2 + 0{,}0000003t^3 \ kcal,$$

Hállese la capacidad calorífica del agua para $t = 50°$.

5. Un cuerpo de 2 kilogramos se mueve rectilíneamente según la ley $s = 1 + t^2$; s se expresa en centímetros, y t en

segundos. Determínese la energía cinética $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ del cuerpo una vez transcurridos 5 segundos desde que empezó el movimiento.

6. Una pieza metálica, cuya densidad es igual a d, tiene la forma de un cono, siendo la base de éste igual a 1 cm. La longitud de la pieza es de 50 *cm*. Hállese la densidad lineal en la mitad de la longitud de la pieza.

7. Hállese el coeficiente angular de la tangente a la parábola $y = x^2$: a) en el origen de coordenadas, b) en el punto $x = 3$, c) en el punto $x = -2$, d) en los puntos de intersección de la parábola con la recta $y = 3x - 2$. Verifíquese que la tangente en el punto $C\ (x_1;\ y_1)$ divide el segmento $[0,\ x_1]$ del eje de las abscisas por la mitad y hállese la regla de la construcción de la tangente.

8. Hállese el coeficiente angular de la tangente a la parábola cúbica $y = x^3$: a) en el punto $(x_1;\ y_1)$, b) en el punto $x = 2$. ¿Puede ser negativo el coeficiente angular de la tangente a la parábola cúbica $y = x^3$? Verifíquese que la tangente en el punto $C\ (x_1;\ y_1)$ divide el segmento $[0,\ x_1]$ del eje de las abscisas en la razón $2 : 1$, a partir del origen de coordenadas. Hállese la regla de construcción de la tangente.

9. Hállese la ecuación de la tangente a la hipérbola equilátera $y = \frac{1}{x}$; a) en el punto $(x_1;\ y_1)$, b) en el punto $x = 1$, c) en el punto $x = -\frac{1}{2}$. ¿Puede ser positivo el coeficiente angular de la tangente?

10. ¿Cuáles tienen que ser los valores del argumento para que las tangentes a las parábolas $y = x^2$ e $y = x^3$ sean paralelas?

11. ¿Cuál es el ángulo que forman al cortarse la hipérbola $x = \frac{1}{x}$ y la parábola $y = \sqrt{x}$?

12. ¿Qué ángulos se forman al cortarse las parábolas: $y = \sqrt{2x}$ e $y = \frac{x^2}{2}$?

13. ¿En qué punto la normal a la parábola $y = x^2$ es perpendicular a la recta $y = 4x + 1$?

14. Demuéstrese que las normales a la curva $y = x^2 - x + 1$, trazadas en los puntos: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{5}{2}$, se cortan en un mismo punto.

§ 11. Cálculo de las derivadas

1. $y=3x^2-6x+10$.

2. $y=5x^4+x^2+\frac{1}{3}$.

3. $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+x+$
$+1$.

4. $y=\frac{1}{5}x^3-\frac{1}{3}x^2-$
$-x+0{,}5$.

5. $y=ax^4+bx^2+c$.

6. $y=ax^3+bx^2-cx+d$.

7. $y=\frac{4x^3}{3}-\frac{2x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$.

8. $y=-\frac{7x^6}{8}+\frac{5x^4}{4}-$
$-\frac{3x^2}{2}-\frac{2}{3}$.

9. $y=-\frac{ax^4}{b}-\frac{bx^2}{2a}+\frac{a-b}{b}$.

11. $y=x^a-x^b+3x^{ab}$.

10. $y=\frac{x^3}{a+b}-\frac{x^2}{a-b}-\frac{x}{ab}$.

13. $y=x^k-2x^\pi+\lg 2$.

12. $y=x^{2a}-2x^{\lg 2}+\pi^2$.

15. $y=3x^{-2}-2x^{-\frac{1}{2}}+x$.

14. $y=6x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}$.

17. $y=x^2\sqrt{3}+5\sqrt{x^3}+$
$+\sqrt{5}$.

16. $y=3\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x}+$
$+5x\sqrt[5]{x}$.

19. $y=\frac{3a^2}{x^2}-\frac{a}{3x^4}$.

18. $y=\frac{1}{x^2}-\frac{7}{x^3}+\frac{1}{3}$.

20 $y=2\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Para los § 81 y 82

Derivar

21. $y=(1+5x)(1-7x)$.

22. $y=(1+4x^3)(1-2x^2)$.

23. $y=(2x^2+3x+5)\times$
$\times(5x^2-2x+3)$.

24. $y=(1-x-x^3)\times$
$\times(1-x+x^3)$.

25. $y=(ax+b)(cx+d)$.

26. $y=(ax+b)(cx^2+d)$.

27. $y=x(2x-1)(3x+2)$.

28. $y=(x^2-1)(x^2-4)\times$
$\times(x^2-9)$.

29. $y=\frac{5x}{1+x^2}$.

30. $y=\frac{1-x}{1+x}$.

31. $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}$.

32. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$.

33. $y=\frac{k+ax^2}{l-ax^2}$.

34. $y=\frac{x}{a}+\frac{a}{x}+\frac{x^2}{b^2}+\frac{b^2}{x^2}$.

35. $y=\frac{2x}{5}+\frac{5}{2x}$.

36. $y=\frac{2+x}{3}+\frac{6}{4-x^2}$.

37. $y=3x-\frac{27}{2-x}$.

38. $y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{a-x}$.

39. $y=\frac{a}{b+cx^n}$.

40. $z=\frac{1}{t^2-t+1}$.

41. $z=\frac{t-t^3}{\sqrt{\pi}}$.

42. $F(u)=(1+u^3)\times$
$\times\left(5-\frac{1}{u^2}\right)$.

Hállese $F'(1)$.

43. $F(u)=\frac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}$.

Hállese $F'(a)$.

44. $F(u)=(1+\sqrt{u})\times$
$\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$.

Hállese $F'(a)$.

45. $S(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^2}{2}$

Hállese $S'(0)$, $S'(2)$.

46. $\rho=\frac{\varphi}{1+\varphi^2}$.

Hállense $\rho'(2)$ y $\rho'(0)$.

Para el § 85

47. $y=(3x^2+8)^6$.

48. $y=(5-4x^3)^7$.

49. $y=(ax^2+bx+c)^3$.

50. $y=(mx^4+nx^2+p)^4$.

51. $y=(x^m+x^n)^k$.

52. $y=(ax^m+bx^n)^p$.

53. $y=\sqrt{a^2+x^2}$

54. $y=\sqrt[3]{a+bx+cx^2}$.

55. $y=(ax+b)^2-(ax-b)^2$

56. $y=\sqrt{5-7\sqrt{1+x^2}}$.

57. $y=x\sqrt{5}-2\sqrt{3x+5}$.

58. $y=(x^2\sqrt{3}+5\sqrt{x^3})^4$.

59. $y=\frac{7}{(x^2-1)^3}$.

60. $y=\frac{5}{(3-2x^2)^2}$.

61. $y=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

62. $y=\frac{2a}{(1+\sqrt{x})^n}$.

63. $y=\sqrt{(1-x^2)^3}-$
$-\sqrt{1-x^2}$.

64. $y=\sqrt[3]{x^2+1}+$
$+\sqrt[3]{(x^2+1)^4}$.

65. $y=\sqrt{2+\sqrt{2x}}$.

66. $y=\sqrt{a+\sqrt{ax}}$.

67. $y=(a+x^2)\sqrt{1+bx}$.

68. $y=(2+3x^2\sqrt{1+5x^2})$.

69 $y=\frac{x^2-2}{(x-1)^4}$.

70. $y=\frac{5x^3}{(5x-4)^3}$.

71. $y=(3x+5)^3(5x+4)^5$.

72. $y=(x+1)(2-3x)^2\times$
$\times(2x+3)^3$.

73. $y=(x+a)^m(x+b)^n$.

74. $y=\frac{(a+x)^m}{(b-x)^n}$.

75. $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

76. $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$.

77. $y=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$.

78. $y=\frac{\sqrt[5]{(1+x^5)^3}}{x^3}$.

79. $y=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$.

80. $y=\frac{2x}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$.

81. $y=\frac{x^n}{(1+\sqrt{x})^n}$.

82. $y=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

Para el § 86

Hállese el límite

83. $\frac{\operatorname{sen} kx}{x}$ si $x\to 0$.

84. $\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a}$ si $x\to a$

85. $\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 3x}$ si $x\to 0$.

86. $x\cdot\operatorname{ctg} x$ si $\to 0$.

Para el § 87

Hállense las derivadas

87. $y=\operatorname{sen} nx$.

88. $y=\operatorname{sen} x^n$.

89. $y=\operatorname{sen}^n x$.

90. $y=\cos(ax)^m$.

91. $y=\cos^m ax$.

92. $y=\operatorname{ctg} ax$.

93. $y=\operatorname{tg}^n bx$.

94. $y=2x+\operatorname{sen} 2x$.

95. $y=\operatorname{tg}\varphi-\varphi$.

96. $y=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\frac{\varphi}{2}$.

97. $\rho=a\cdot\cos 2\theta$.

98. $\rho=k\sqrt{\cos 2\theta}$.

99. $x=r(t-\operatorname{sen} t)$.

100. $y = r(1 - \cos t)$.

101. $y = 2 \cdot \operatorname{sen} 3x + 3\cos 2x$.

102. $y = A \cdot \operatorname{sen}(\omega t + a)$.

103. $s = \cos \frac{a}{t}$.

104. $s = \operatorname{sen} \frac{1}{t^2}$.

105. $y = \cos^2 2x$.

106. $y = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$.

107. $y = a \cdot \operatorname{sen}^3 \frac{1}{x}$.

108. $y = \operatorname{sen}(\cos x)$.

109. $y = \cos(\operatorname{sen} x)$.

110. $y = \operatorname{ctg}^3 x + 3 \operatorname{ctg} x$.

111. $y = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$.

112. $y = \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + x$.

113. $y = \sqrt{1 + \operatorname{sen} 2x} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} 2x}$.

114. $y = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$.

115. $y = \operatorname{sen} x \times (\operatorname{sen} x + \cos x)$.

116. $y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x$.

117. $y = \operatorname{sen}^2 x \cdot (\cos^2 x + 1)$.

118. $f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$.

Hállese $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

119. $f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$.

Hállese $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

120. $f(x) = \frac{a \cdot \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$.

Hallese $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

121. $f(x) = \frac{1 - \cos \frac{x}{3}}{\operatorname{sen} \frac{x}{3}}$.

Hállese $f'(\pi)$.

122. $y = ax \cdot \operatorname{tg} ax$.

123. $y = \sec ax$.

124. $y = \sec^n ax$.

Para el § 88

125. Sabiendo que $\frac{1}{\lg e} = 2{,}302585$ y $\frac{1}{\ln 10} = 0{,}4342945$, hállense:

a) los logaritmos naturales de 2, 7 y 13 por medio de los logaritmos decimales de esos números;

b) $\ln 3 = 1{,}09861$; $\ln 5 = 1{,}60944$; $\ln 11 = 2{,}39790$.

Hállense sus logaritmos decimales por medio de cálculos.

Para los § 89—93

Hállense las derivadas

126. $y = \log_a (3 + x)$.

127. $y = \log_a (1 + x^2)$.

128. $y = \ln (a^2 - x^2)$.

129. $y = \ln (5 + 3x)$.

130. $y = \frac{1}{3} \ln (a^2 + x^2)$.

131. $y = 3 \ln (5 - x) + 2 \ln (4 + x)$.

132. $y = \ln x^3 + \ln^3 x$.

133. $y = \log_a \sqrt{x}$.

134. $y = \ln 3x + \ln \frac{3}{x}$.

135. $y = \ln \sqrt{x} + \sqrt{\ln x}$.

136. $y = \ln \ln x$.

137. $y = \ln \sqrt{x + 1}$.

138. $y = \ln \frac{a + x}{a - x}$.

139. $y = \ln \frac{x^n}{1 + x^n}$.

140. $y = \log_a x^2 + \log_a^2 x$.

141. $y = \log_a^3 2x$.

142. $y = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$.

143. $y = \ln \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$.

144. $y = \ln (x + \ln x)$.

145. $y = a \cdot \ln x^n$.

146. $y = a \cdot \ln^n x$.

147. $y = \ln \operatorname{sen} x + \ln \cos x$.

148. $y = \ln (1 + \cos x)$.

149. $y = \ln \operatorname{sen}^2 x$.

150. $y = \ln \sqrt{\operatorname{sen} 2x}$.

151. $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$.

152. $y = \operatorname{sen} \ln x$.

153. $y = \operatorname{tg} \ln x$.

154. $y = 5^{x^2 - 2x}$.

155. $y = 2^{x^3 - 3x}$.

156. $y = \frac{1}{2} \cdot 3^{1 + x^2}$

157. $y = x^n + n^x$.

158. $y = e^x + e^{-x}$.

159. $y = e^{\frac{x}{2} + \frac{2}{x}}$.

160. $\rho = a^{\varphi}$.

161. $\rho = a^{\ln \varphi}$.

162. $y = a \cdot e^{\sqrt{x}}$.

163. $y = e \cdot a^{\frac{x}{e}}$.

164. $y = 5^{\operatorname{sen}^2 x}$.

165. $y = a^{\operatorname{tg} nx}$.

166. $y = e^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$.

167. $y = a^{e^x}$.

168. $y = e^{a^x}$.

169. $y = (x - 3) e^{2x} - 4x \cdot e^x + 3$.

170. $y=x^2 \cdot e^x \cdot \cos x$.

171. $\frac{\ln x}{x}$.

172. $y=x \cdot \ln x - x$.

173. $y=e^{x \cdot \ln x}$.

174. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

175. $y=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$.

176. $y=x \cdot \operatorname{ctg} x - \ln \operatorname{sen} x + \frac{x^2}{2}$.

177. $y=\frac{1}{2} x^2 \ln \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x$.

178. $f(x)=\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Hállese $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

179. $f(x)=e^{\pi x} \operatorname{sen} \pi x$.

Hállese $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

180. $y=e^{ax} \times (\operatorname{sen} ax - \cos ax)$.

181. $f(x)=\ln \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$.

Hállese $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

182. $f(x)=\sqrt[3]{\ln x}$.

Hállese $f'(e)$

183. $f(x)=x\sqrt[3]{\ln x}$.

Hállese $f'(e)$.

184. $y=\ln(\ln^2 x)$

185. $f(x)=\frac{x}{e^{\sqrt{x}}}$.

Hállese $f'(0)$.

186. $y=\ln e^{7x^2-x+1}$.

187. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

188. $y=\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)$.

189. $y=\ln \frac{x}{\sqrt{x^2-1}-x}$.

190. $y=\operatorname{arc\ sen} \frac{x}{a}$.

191. $y=\operatorname{arc\ tg} \frac{1}{x}$.

192. $y=\operatorname{arc\ cosec} x$.

193. $y=e^{\operatorname{arc\ sen} x}$.

194. $y=\operatorname{arc\ sen} (\cos x)$.

195. $y=\operatorname{arc\ cos} (\operatorname{sen} x)$.

196. $y=\operatorname{arc\ tg} (\ln x)$.

197. $y=\operatorname{arc\ ctg} \left(\ln \frac{1}{x}\right)$.

198. $y=\ln \operatorname{arc\ tg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$.

199. $u=\operatorname{arc\ tg} (\ln \operatorname{sen} x)$.

200. $y=\operatorname{arctg} \frac{a+x}{a-x}$.

201. $y=x \cdot \operatorname{arc\ sen} x$.

202. $y=\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x+$
$+\frac{1}{2}\operatorname{arc} \operatorname{tg} x-\frac{1}{2}x.$

203. $y=\sqrt{a^2-x^2}+$
$+a\cdot\operatorname{arc} \operatorname{sen}\frac{x}{a}.$

204. $y=x\sqrt{1-x^2}+$
$+\operatorname{arc} \operatorname{sen} x.$

205. $y=\operatorname{arc} \operatorname{tg}\frac{a}{x}+$
$+\ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}.$

206. $y=x^{\frac{1}{x}}.$

207. $y=(\operatorname{sen} x)^x.$

208. $y=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}.$

209. $y=x^{\ln x}.$

210. $y=x^{\frac{1}{\ln x}}.$

211. $y=x^{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}.$

212. $y=e^{x^x}.$

213. $y=\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}.$

Para el § 94

Hállense las derivadas del orden indicado en la solución

214. $y=\operatorname{arc} \operatorname{sen} x.$ Solución: $y''=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

215. $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}).$ Solución: $y''=\frac{1}{2a}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}).$

216. $y=\frac{a\cdot\operatorname{sen} x}{1+\cos x}.$ Solución: $y''=\frac{a\cdot\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}.$

217. $y=\ln \operatorname{sen} x.$ Solución: $y'''=2\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{cosec}^2 x.$

Hállese la expresión general de las derivadas de orden enésimo

218. $y=x^m.$ Solución: $y^{(n)}=m(m-1)\ldots$
$\ldots[m-(n-1)]\,x^{m-n}.$

219. $y=\frac{1}{x+a}.$ S.: $y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!$
$(x+a)^{-(n+1)}.$

220. $y=e^{a+bx}.$ S.: $y^{(n)}=b^n\cdot e^{a+bx}.$

221. $y=a^{bx}.$ S.: $y^{(n)}=a^{bx}\cdot b^n\cdot\ln^n a.$

222. $y=\cos x.$ S.: $y^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$

223. $y = \operatorname{sen} x$. S.: $y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

224. $y = \ln(ax + b)$. S.: $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!\, a^n}{(ax+b)^n}$.

Compruébense las igualdades

225. Si $y = \operatorname{sen} x - x \cdot \cos x$, entonces $y'' + y = 2 \operatorname{sen} x$.

226. Si $y = a \cdot \cos 2x + b \cdot \operatorname{sen} 2x$, entonces $y'' + 4y = 0$.

§ 12. Estudio de la función por medio de la derivada. Máximo y mínimo. La velocidad y la aceleración

Determínense los intervalos de la variación de x en los que las funciones siguientes crecen y decrecen:

1. $y = x^2 - 4x + 6$.
2. $y = 2x^2 - 4x + 5$.
3. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.
4. $y = x^3 - 3x^2 + 5$.
5. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
6. $y = x^4 - 4x^2 + 5$.

Determínense los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

7. $y = 2x^2 - 5x - 3$.
8. $y = 4 + 3x - x^2$.
9. $y = 4 - 3x - x^2$.
10. $y = x^3 - 27x$.
11. $y = x^2 - 2x^3$.
12. $y = x^3 + 3x - 7$.
13. $y = x^3 + 9x - 1$.
14. $y = x^3 + x^2 - 8x + 1$.
15. $y = x^3 - 2x^2 - 7x + 2$.
16. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 15$.
17. $y = x^4 - 14x^2 + 24x - 3$.
18. $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.
19. $y = (x-1)(x+1)^3$.
20. $y = x(x-1)^2 \cdot (x+1)^3$.
21. $y = \frac{2x}{5} + \frac{5}{2x}$.
22. $y = 3x - \frac{27}{2-x}$.
23. $y = \frac{x}{x^2+1}$.
24. $y = \frac{1-x}{x^2-x+4}$.
25. $y = \frac{3x^2+5x+25}{2+x}$.
26. $y = \frac{x^2+3x-10}{x+5}$.
27. $y = \frac{1-x}{(1+x)^2}$.
28. $y = 2 + \sqrt[3]{(x-2)^2}$.
29. $y = 3 - \sqrt[3]{(x+4)^2}$.
30. $y = e^{-x^2}$.
31. $y = x^2 \cdot e^{-x}$.
32. $y = \frac{x}{\ln x}$.

Hállense en los siguientes ejercicios el máximo y el mínimo de la función respecto a los valores más sencillos de los arcos.

33. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$. 34. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

35. $y = x + \operatorname{tg} x$. 36. $y = \operatorname{sen} x (1 + \cos x)$.

37. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

38. Divídase el número 10 en dos partes de tal modo que su producto alcance el valor máximo.

39. Divídase el número 10 en dos partes de tal modo que la suma del duplo de una de ellas y del cuadrado de la otra sea la mínima.

40. Hállese un número positivo tal que al sumarlo con su recíproco dé la suma mínima.

41. Hállese un número positivo que se diferencie de su cuadrado en la magnitud máxima.

42. De todos los rectángulos que tienen un perímetro dado $2p$, hállese el que tiene el área máxima.

43. De todos los rectángulos inscritos en un círculo de radio R, hállese el que tiene: a) el área máxima, b) el perímetro máximo.

44. De todos los triángulos isósceles inscritos en un círculo de radio R, hállese el que tiene: a) el área máxima, b) el perímetro máximo.

45. ¿Cuál de los triángulos rectángulos de hipotenusa c tienen: a) la suma máxima de los catetos, b) el área máxima?

46. Una ventana tiene la forma de un rectángulo, con un semicírculo en lo alto, y su perímetro es $2p$. ¿Cuál debe ser la proporción entre las dimensiones de la ventana para que tenga el área máxima?

47. ¿A qué tiene que ser igual el radio de un círculo para que su sector, de perímetro $2a$, tenga el área máxima?

48. ¿Cuál tiene que ser la proporción entre el radio y la altura de un cilindro para que éste tenga el volumen dado v y la superficie total sea la minima?

49. ¿De qué dimensiones es necesario elegir el radio y la altura de una tienda de campaña de forma cónica para que tenga el volumen dado v y para que se gaste en ella el mínimo de tela?

50. Hállense los lados de un rectángulo de área máxima inscrito en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

51. Determínese la anchura de un rectángulo de área máxima inscrito en un segmento de altura h de la parábola $y^2 = 2px$.

52. Una torre de perforación está en el campo a 9 *km* del punto más próximo de una carretera. Hace falta enviar a una persona desde la torre a un poblado situado a lo largo de la carretera a 15 *km* del punto mencionado (se supone que la carretera es recta). Si esa persona marcha en bicicleta a 8 *km* por hora a campo traviesa y a 10 *km* por hora por la carretera, ¿a qué punto de la carretera debe dirigirse por el campo para llegar en menos tiempo al poblado?

53. El barco A, que se encuentra a 75 millas al este del barco B, navega hacia el oeste a 12 millas por hora; el barco B navega hacia el norte a 9 millas por hora. ¿Dentro de cuánto tiempo se encontrarán los barcos a la distancia minima?

54. La luz de una lámpara de mesa puede bajarse y subirse. ¿A qué altura es necesario levantarla sobre un libro colocado en la mesa a a centímetros del centro de la base de la lámpara para que a iluminación sea la máxima? Za iluminación de directamente proporcional al seno del ángulo de inclinación del rayo luminoso respecto al plano del libro e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del libro a la luz $\left(I = \frac{k \cdot \operatorname{sen} \varphi}{r^2}\right)$.

55. Supongamos que la magnitud x ha sido medida n veces con la misma escrupulosidad y que los resultados obtenidos son $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$, que aunque muy poco, se diferencian entre sí. En cada medición, la diferencia $|x - l_k|$ es el error absoluto. Según la teoría de los errores, el valor más probable de la magnitud será aquél con el cual la suma de los cuadrados de los errores:

$$(x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + (x - l_3)^2 + \ldots + (x - l_n)^2$$

alcanza el mínimo. Demuéstrese que el valor más probable es la media aritmética de los resultados de las mediciones:

$$x = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n}$$

Investíguense las siguientes funciones y trácense sus gráficas:

56. $y = x^4$.

57. $y = x^3$.

58. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

59. $y = x^2 - 2x^3$

60. $y=e^{-x^2}$.

61. $y=\frac{2x}{5}+\frac{5}{2x}$.

62. $y=\frac{3x^2+5x+25}{2+x}$.

63. $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}$.

64. $y=x+2\sqrt{4-x}$.

65. La ley del movimiento rectilíneo de un punto es: $s=t^3-4t^2+10t+1$. Determínese su velocidad y aceleración en los instantes: $t=0$, $t=1$ y $t=2$.

¿En qué instante alcanza el punto la velocidad mínima y cuál es la magnitud de esta velocidad mínima?

66. La ley del movimiento rectilíneo de un punto es: $s=a\cdot e^{-kt}$. Determínese la velocidad y aceleración iniciales

67. La ley del movimiento rectilíneo de un punto es:

$$s=\frac{v_0}{2}(e^t-e^{-t}).$$

Verifíquese que la aceleración $\alpha=s$.

68. La ley del movimiento rectilíneo de un punto es:

$$s=a\cdot \operatorname{tg}\omega t.$$

Hállense la velocidad y la aceleración.

§ 13. La diferencial

1. Verifíquese que la diferencial de una función lineal es igual al incremento de la función.

2. Calcúlese el incremento y la diferencial de la función $y=x^3-2x+5$ al variar el valor del argumento de $x=2$ a $x+\Delta x=2{,}01$.

3. Calcúlese el incremento y la diferencial de la función $y=\frac{2}{x-1}$ al variar el argumento de 3 a 3,001.

Hállense las diferenciales de las siguientes funciones:

4. $y=ax^3+bx^2-cx+d$.

5. $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

6. $y=\frac{x}{c}-\frac{c}{x}$.

7. $y=\sqrt[3]{1+x^2}$.

8. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ al variar x de 3 a 3,2.

9. $y=\sqrt{\frac{4-x}{1+x}}$ al variar x de 0 a 0,1.

10. $y=\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\operatorname{sen} x-\cos x}$.

11. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x$.

12. $y=\ln x^2+\ln \sqrt{x}$.

13. $y=x\cdot\ln x$.

14. $y=\ln \sqrt{1+x^2}$.

15. $y=\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

16. $y=e^x(\operatorname{sen} x+\cos x)$.

17. Al medir con una aproximación hasta de $\frac{1}{2}\cdot 0{,}1$ m se ha encontrado que el lado de un cuadrado es igual a $5{,}2$ m. Determínense los errores máximos, absoluto y relativo, para el área del cuadrado.

18. Al medir con aproximación hasta de $\frac{1}{2}\cdot 0{,}01$ m se ha encontrado que la arista de un cubo es igual a $1{,}05$ m. Hállense los errores máximos, absoluto y relativo, para el volumen del cubo.

19. El período de oscilación de un péndulo se determina por medio de la fórmula $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, en la que l es la longitud del péndulo y g es la aceleración de la fuerza de gravedad. Al medir l se ha cometido el error Δl. Determínese el error relativo cometido al calcular T.

20. Verifíquese que al elevar a la enésima potencia el error relativo de la base aumenta n veces, y al extraer la raíz de índice n, el error relativo del radicando queda dividido por n.

§ 14. La integral indefinid

Para los § 113—116

1. $\int x^3\,dx$.

2. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

5. $\int (x^4-3x^3+5x^2)\,dx$.

6. $\int (1-2x)(1+3x)\,dx$.

7. $\int \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx$.

8. $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

9. $\int \frac{2x+3}{x}\,dx$.

10. $\int \frac{(x+2)^2}{x}\,dx$.

11. La velocidad de un cuerpo después de t segundos de haber comenzado el movimiento es igual a $v_0 + at$. Determínese el espacio recorrido en t segundos.

12. Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto (1; 1) si el coeficiente angular de la tangente en cualquiera de sus puntos es igual a $3x - 1$.

Para el § 117

13. $\int \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right) dx.$

14. $\int \frac{dx}{1-x}.$

15. $\int \frac{dx}{(x+1)^2}.$

16. $\int \frac{4x^3\, dx}{(x^4+a^4)^2}.$

17. $\int \frac{x\, dx}{(x^2+a^2)^5}.$

18. $\int \frac{ax\, dx}{a^2+x^2}$

19. $\int \frac{x^{-\frac{1}{2}}\, dx}{1+\sqrt{x}}.$

20. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

21. $\int \frac{\ln x \cdot dx}{x}.$

22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

23. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x^2}.$

24. $\int e^{-4x} \cdot dx.$

25. $\int \frac{dx}{3 \cdot e^x}.$

26. $\int 12a^{2x} \cdot \ln a \cdot dx.$

27. $\int 2^{4x^2-8}x\, dx.$

28. $\int \frac{x^3+7x^2-4x-3}{x-1}\, dx.$

29. $\int \frac{x^3-x^2+x+4}{x+1}\, dx.$

30. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\, dx.$

31. $\int x^2\sqrt{x^3-1} \cdot dx.$

32. $\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b}\, dx.$

33. $\int \frac{(2x+a)\, dx}{\sqrt{x^2+ax+b}}.$

34. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \cdot dx.$

35. $\int \frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}\, dx.$

36. $\int 3 \cdot e^x \cdot \sqrt{1+e^x} \cdot dx.$

37. $\int 2x\sqrt{2x-1}\, dx.$

38. $\int \frac{dx}{1+e^x}.$

39. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}.$

40. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}.$

41. $\int \frac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}-1}\,dx.$

42. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx.$

43. $\int \frac{dx}{\operatorname{arcsen} x\cdot\sqrt{1-x^2}}.$

44. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\cdot dx}{1+x^2}.$

45. $\sqrt{\frac{x-1}{x}}\cdot\frac{dx}{x^2}.$

46. $\int \frac{dx}{\left(\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right)\cdot(x+x^3)}$

47. La velocidad v de un cuerpo se determina por la ecuación $v = 3t^2+2t$; la distancia recorrida durante el tiempo $t = 2$ segundos es igual a 12 m. Hállese la ley del movimiento.

48. Hállese la ley del movimiento rectilíneo, sabiendo que en cada instante t la aceleración $a = t^2\ m/seg^2$ y que el cuerpo comenzó a moverse a la velocidad inicial $v=2$ metros por segundo.

49. Hállese la ecuación de la curva si en todos sus puntos la tangente forma con el eje Ox un ángulo cuya tangente es igual a $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$, y la curva pasa por el punto $M(0;a)$.

Para el § 118

50. $\int \operatorname{sen}(nx+a)\cdot dx.$

51. $\int \cos\frac{2x-3}{5}\,dx.$

52. $\int (\operatorname{sen} 2x-\cos 3x)\cdot dx.$

53. $\int \left(\cos ax+\operatorname{sen}\frac{x}{a}\right)dx.$

54. $\int \left(\cos\frac{x}{a}-\operatorname{sen} ax\right)\cdot dx.$

55. $\int (\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x)\,dx.$

56. $\int (\sec^2 5x-\operatorname{cosec}^2 5x)\,dx.$

57. $\boxed{\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\cos x + C.}$

58. $\boxed{\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\operatorname{sen} x + C.}$

59. $\int \operatorname{tg} x\cdot\sec x\,dx.$

60. $\int \operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{cosec} x\cdot dx$

61. $\sqrt{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}.$

62. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}\cdot\operatorname{sen}^2 x}.$

63. $\int \operatorname{sen}^2 x\cdot\cos x\,dx.$

64. $\int \cos^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot dx.$

65. $\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}.$

66. $\int \frac{\operatorname{sen} ax\,dx}{\cos^3 ax}.$

67. $\int x^2\cdot\operatorname{sen}(2x^3+3)\cdot dx.$

68. $\int \cos\frac{3}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

69. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} 2x}\,dx$.

70. $\int \frac{\cos x\cdot dx}{1+2\operatorname{sen} x}$.

71. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{a-b\cdot\cos x}$

72. $\int \frac{1+\cos x}{(x+\operatorname{sen} x)^3}\,dx$.

73. $\int \frac{4dx}{1-\cos x}$.

74. $\int \frac{dx}{a\,(1+\cos x)}$.

75. $\int \operatorname{tg}^2 x\cdot dx$.

76. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

77. $\int e^{\cos x}\cdot\operatorname{sen} x\,dx$.

78. $\int \cos x\cdot a^{\operatorname{sen} x}\,dx$.

79. $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$.

80. $\int \frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}\,dx$.

81. $\int \frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos x\cdot dx}{\sqrt{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}}$.

82. $\int \frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos x\cdot dx}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^2 x}}$.

83. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$.

84. $\int \sqrt{1+\operatorname{sen} x}\cdot dx$.

85. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}$.

86. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x}$.

87. $\int \frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\cos^3 x}\,dx$.

88. $\int \frac{\cos x+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$.

89. $\int \frac{\cos x+2\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x-2\cos x}\,dx$.

90. $\int \frac{x\cdot\cos x\cdot dx}{(x\cdot\operatorname{sen} x+\cos x-1)^m}$.

91. Hállese una función si su derivada es igual a $\operatorname{sen} x+\cos x$ y toma el valor 1, para $x=\pi$.

92. En cada instante la velocidad de un cuerpo es $v=\cos 2t$. Hállese la ley del movimiento sabiendo que al transcurrir el tiempo $t=\frac{\pi}{2}$ segundos, el cuerpo recorre la distancia s, igual a $6\,m$.

En los ejemplos siguientes, los valores de las letras son positivos. Las integrales encerradas en rectángulos pueden emplearse como fórmulas. Deben omitirse los ejercicios marcados con asteriscos si no se estudian las fórmulas (XI) y (XII).

Calcúlese:

93. $\int \frac{dx}{9+4x^2}$.

94. $\int \frac{dx}{4+9x^2}$.

95. $\int \frac{dx}{7+5x^2}$.

96. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

97*. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$.

98*. $\int \frac{dx}{7-5x^2}$.

99. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

100. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

101. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x^2}}$.

102. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$.

103*. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 9}}$.

104*. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 4}}$.

105*. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}}$.

106*. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+7x^2}}$.

107*. $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

108. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^6}}$.

109. $\int \frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}$.

110. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

111. $\int \frac{\cos x \cdot dx}{a^2+\operatorname{sen}^2 x}$.

112*. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{a^2-\cos^2 x}$.

113. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$

114. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx.$

115. $$\boxed{\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{a}}\, x + C}$$

116*. $$\boxed{\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}} + C}$$

117. $$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{b}{a}}\, x + C}$$

118*. $$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln\left(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}\right) + C}$$

119*. $$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2-b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2-b}\right) + C}$$

120. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

121. $\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\operatorname{sen}^2 x}$.

122*. $\int \frac{dx}{a\cos^2 x - b \cdot \operatorname{sen}^2 x}$.

Para el § 119

123. $\int \cos^3 x\,dx.$

124. $\int \operatorname{sen}^5 x \cdot dx.$

125. $\int (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \times$
$\times \operatorname{sen} x\,dx.$

126. $\int \operatorname{sen}^4 x \cdot \cos^3 x\,dx.$

127. $\int \cos^3 x \cdot \operatorname{sen} 2x\,dx.$

128. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{1 - \operatorname{sen} x}.$

129. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x \cdot dx}{1 + \cos x}.$

130. $\int \cos^2 (ax) \cdot dx$

131. $\int \operatorname{sen}^2 (ax)\,dx.$

132. $\int \operatorname{sen}^4 x \cdot dx.$

133. $\int \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^4 x \cdot dx.$

134. $\int \cos^2 x \cdot \cos 2x \cdot dx$

135. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx.$

136. $\int \operatorname{tg}^4 x \cdot dx.$

137. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx.$

Para el § 121

138. $\int x \ln x\,dx.$

139. $\int x e^{-x}\,dx.$

140. $\int \frac{x}{e^{2x}}\,dx.$

141. $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$

142. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx.$

143. $\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx.$

144. $\int x \operatorname{sen}^2 x\,dx.$

145. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}.$

146. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}.$

147. $\int x^3 \cdot e^{2x}\,dx.$

148. $\int x^{-2} \ln x\,dx.$

149. $\int x^3 (\ln x)^2\,dx.$

150. $\int x^2 \arcsin x \, dx.$ 151. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx.$

152. $\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx.$ 153. $\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx.$

Indicación.

$$\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^2 x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

se toma mediante la sustitución

$1-x^2=t, \quad x^2=1-t.$

Demostrar las fórmulas de "decreciencia de potencia :

154. $\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx.$

Indicación.

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\, dx;$$
$$u = \operatorname{sen}^{n-1} x;\ dv = \operatorname{sen} x\, dx;$$
$$du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos x\, dx;\ v = -\cos x;$$
$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x.$$

155. $\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx.$

§ 15. La integral definida

Calcúlese:

1. $\int_0^3 5x^2\, dx.$ 2. $\int_{-1}^{+2} (2x+3x^2+4x^3)\, dx.$

3. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2}.$ 4. $\int_1^4 \frac{32\, dx}{x^3}.$

5. $\int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx.$

6. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

7. $\int\limits_1^3 \sqrt{2x-2}\,dx.$

8. $\int\limits_1^3 \frac{x\,dx}{1+x^2}.$

9. $\int\limits_0^1 e^x\,dx.$

10. $\int\limits_{-1}^{+1} a^x\,dx.$

11. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$

12. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen} 3x\,dx.$

14. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\,dx.$

15. $\int\limits_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^2 x\,dx.$

16. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, suponiendo $x=t^2$.

17. $\int\limits_0^{\ln 4} \sqrt{e^x-1}\,dx$, suponiendo $e^x-1=t^2$

18. $\int\limits_0^1 x^3 e^{2x}\,dx$*.

19. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{arctg} x\,dx$*.

20. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\,dx.$

---

* Se toma la integral por partes, § 121.

21. La velocidad de un cuerpo en un movimiento rectilíneo se expresa por medio de la fórmula $v = 2 + t$. Hállese la distancia recorrida entre los instantes $t = 2$ y $t = 5$.

22. Un cuerpo ha sido arrojado hacia abajo verticalmente, con una velocidad inicial de 10 metros por segundo. Sabiendo que $\frac{dv}{dt} = g$, hállese la distancia que ha recorrido el cuerpo en t segundos.

23. Hállese la integral definida de la función $4x^3$, si su función primitiva es igual a cero, para $x = 2$.

24. Calcúlese la integral definida de la función $\frac{x^2}{1+x^3}$, si su función primitiva es igual a cero, para $x = 1$.

25. Calcúlese la integral definida de la función $\operatorname{tg} x$, si su función primitiva es igual a cero para $x = 0$.

26. Calcúlese la integral definida de la función $\operatorname{sen} 2x$, si su función primitiva es igual a cero para $x = \frac{\pi}{4}$.

27. Calcúlese el área de una semionda de la sinusoide $y = \operatorname{sen} 2x$.

28. Calcúlese el área limitada por la hipérbola equilátera $xy = 1$, el eje Ox y las rectas $x = 1$ y $x = a$ $(a > 1)$.

Calcúlense por integración las áreas limitadas por las siguientes líneas:

29. $y = 4x$, $y = 0$, $x = 3$.

30. $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 3$.

31. $2y - 3x - 5 = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

32. $x + 2y + 8 = 0$, $y = 0$, $x = -4$.

33. $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

34. $y = x^2 - x$, $y = 0$.

35. $y = x^3$, $y = 2x$.

36. $y^2 = 4x$, $y^2 = x^3$.

37. $y^2 = 4(x + 1)$, $y = x + 1$.

38. $y^2 = 2(x + 4)$, $y = x + 4$.

39. $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

40. $y^3 = x$, $y = -2$, $x = 8$.

41. $4x^2 - 9y + 18 = 0$ y $2x^2 - 9y + 36 = 0$.

42. $5x^2 - 60x + 4y + 160 = 0$ y $x^2 - 12x + 2y + 32 = 0$.

43. $x^2 + y^2 = 8$ y $y^2 = 2x$.

44. $x^2 + y^2 = 16$ y $y^2 = 4(x + 1)$.

45. Trácese la gráfica de la función potencial $y = x^m$, considerando a m como número entero positivo, y de un

punto arbitrario $A\ (x,\ y)$ de la curva obtenida bájense las perpendiculares AB y AC a los ejes de coordenadas. Demuéstrese que el área limitada por la curva $y = x^m$, el eje Ox y la recta AB constituye la $\frac{1}{m+1}$ parte del área del rectángulo $OCAB$.

46. Demuéstrese que el área limitada por la curva continua $x = \varphi\ (y)$, el eje Ox y las rectas $y = a$, $y = b$ es igual a $\int\limits_a^b x dy = \int\limits_a^b \varphi\ (y) \cdot dy$.

47. Verifíquese que el área limitada por el arco AB de la hipérbola equilátera $xy = k$, el eje Ox y las ordenadas de los puntos A y B es igual al área limitada por este mismo arco AB, el eje Oy y las abscisas de los puntos A y B $\left(\text{cada una de ellas es igual a } k \cdot \ln \frac{b}{a}\right)$.

48. Calcúlese el área del segmento de la parábola $x^2 - 12y = 0$, *que es cortado por la recta que pasa por el* origen de coordenadas, y por el punto de la parábola, cuya abscisa es igual a 6.

49. Calcúlese el área del segmento de la parábola $4y - x^2 = 0$, que corta una cuerda que une los puntos de la parábola cuyas abscisas son 2 y 4.

50. La ecuación de una curva es $y = x\ (3 - x)^2$. Calcúlese el área limitada por esta curva, el eje Ox y las ordenadas de los puntos máximo y mínimo.

51. Hállese el volumen de un paraboloide de revolución engendrado por la revolución alrededor del eje Ox del segmento de la parábola $y^2 = x$ de altura x.

52. Hállese el volumen de un esferoide engendrado por la revolución de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor de su eje menor $(a > b)$.

53. Calcúlese el volumen engendrado por la revolución de una onda de la sinusoide $y = \text{sen}\ x$.

54. Calcúlese de volumen engendrado al girar alrededor del eje Ox la superficie limitada por las parábolas $y^2 = 4x$ e $y^2 = x^3$.

55. Calcúlese el volumen engendrado al girar alrededor del eje Ox la superficie limitada por las parábolas $y^2 = 8x$ e $y = x^2$.

56. A la parábola $y^2 = 12x$ en el punto cuya abscisa es 6 se ha trazado una tangente. Calcúlese el volumen engendrado al girar alrededor del eje Ox la superficie limitada por la tangente trazada, el eje Ox y la parábola.

57. A la parábola $y^2 = 2(x-1)$ en el punto cuya abscisa es igual a 3 se ha trazado una tangente. Calcúlese el volumen engentrado por la revolución alrededor del eje Ox del área limitada por la tangente trazada, el eje Ox y la parábola.

58. Una parte de la elipse $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$, situada entre las perpendiculares al eje Ox, trazadas por los focos, gira alrededor del eje Ox. Determínese el volumen del la barrica obtenida.

59. Demúestrese que el volumen del anillo obtenido al girar un círculo alrededor del eje Ox, que no lo intersecciona (fig. 177), es igual al producto del área del círculo de la sección del anillo por la longitud de la circunferencia media del anillo.

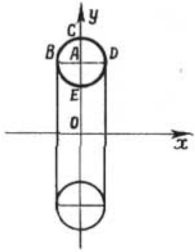


Fig. 177

Indicación. Designando el radio del círculo por medio de la letra r y las coordenadas del centro A con $(0, b)$, obtenemos la ecuación del círculo:

$$x^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

De la ecuación obtenemos dos valores de y:

$$y - b = \pm\sqrt{r^2 - x^2},$$

$$y_1 = b + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y_2 = b - \sqrt{r^2 - x^2}.$$

y_1 es el valor de la ordenada de los puntos de la semicircunferencia BCD, e y_2, el valor de la ordenada de los puntos de la semicircunferencia BED. El volumen del anillo se calcula por medio de la fórmula (XXII).

60. Hállese el volumen de un cuerpo engendrado por la revolución de la rama de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje Ox, desde el vértice $x = a$ hasta la sección $x = x$ y alrededor del eje Oy desde la sección $y = 0$ hasta la sección $y = y$.

61. Calcúlese la presión que soporta una compuerta rectangular de esclusa de 20 metros de ancha y 5 metros de profundidad de inmersión.

62. Calcúlese la presión ejercida sobre la superficie de un triángulo de 8 metros de base y 6 metros de altura, sumergido en el agua de tal manera que su base esté en la superficie del agua, y la altura se encuentra dirigida hacia abajo verticalmente.

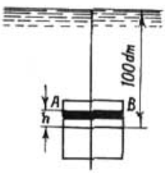


Fig. 178

63. Una presa vertical tiene la forma de un trapecio, cuya base superior es 50 metros, la inferior, 20 metros, y la altura, 10 metros. ¿Cuál es la presión que soporta la presa si su base superior está en la superficie del agua?

64. Determínese la presión que soporta 1 dm^2 de la pared vertical de la borda de una embarcación si el centro del cuadrado está debajo del agua, a 10 metros de profundidad.

Indicación (fig. 178). El área del rectángulo AB es $ds =$ $= 1\ dm \cdot \Delta h\ dm$ y se encuentra situada desde la superficie libre del agua a la profundidad de $(100 - h)\ dm$. Aquí h es un número positivo si AB está encima del centro O, y es negativo si está debajo del centro O.

65. El extremo de un tubo redondo sumergido en el agua horizontalmente puede ser cerrado con una tapa. Determínese la presión que soporta esta tapa si su diámetro es igual a 6 dm y su centro está a una profundidad del agua de 15 metros.

66. El movimiento rectilíneo de un cuerpo en cierto medio ambiente está sujeto a la ley $s = t^2$, donde s es la longitud del espacio recorrido durante el tiempo t. La resistencia del medio ambiente es proporcional al cuadrado de la velocidad del movimiento. Determínese el trabajo que efectúa la resistencia del medio ambiente al desplazarse el cuerpo desde $s = 0$ hasta $s = a$.

67. Según la ley de Hoocke, la fuerza necesaria para dilatar una varilla metálica desde la longitud l_0 hasta la longitud $l_0 + x$ es igual a $\frac{kx}{l_0}$, donde k es un número constante que depende de las propiedades del metal. Calcúlese el trabajo invertido para dilatar la varilla desde la longitud l_0 hasta la longitud l_1.

68. La contracción de un muelle espiral es proporcional a la fuerza empleada. Calcúlese el trabajo necesario para contraer un muelle en 5 centímetros, teniendo en cuenta que para contraerlo en un centímentro es necesaria la fuerza de 2 *kg*.

69. La fuerza necesaria para dilatar un muelle metálico es proporcional a su dilatación. Calcúlese el trabajo invertido al dilatar un muelle en 5 centímetros, si para dilatarlo en un centímetro es necesaria la fuerza de 10 *kg*.

70. Calcúlese el trabajo necesario para extraer el agua de una cisterna cilíndrica cuyo radio tiene r metros y su profundidad h metros.

71. Calcúlese el trabajo necesario para extraer el agua que llena una caldera semiesférica de radio $r = 0{,}6$ metros.

72. Según la ley de Newton, la fuerza de gravitación es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Un cuerpo que se encuentra en reposo atrae un punto material que se desplaza por una línea recta desde la distancia r_1 hasta r_2 a partir del centro del cuerpo.

Calcúlese el trabajo que realiza la fuerza de gravitación.

Referente al § 128. Valor medio de una función.

Calcular los valores medios de las funciones siguientes:

73. $f(x) = x^2$ en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 3$.

74. $f(x) = a + \cos x$ en el segmento $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

75. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ en el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

76. $f(x) = \ln x$ en el segmento $1 \leqslant x \leqslant e$*.

§ 16. Ecuaciones diferenciales

Para los §§ 136—141.

Demostrar que para las ecuaciones diferenciales dadas, las funciones y de x dadas son sus soluciones:

1. $\frac{dy}{dx} = (a - y) \operatorname{tg} x; \quad y = a - 5 \cos x.$

2. $y' \operatorname{tg} x = y; \quad y = C \operatorname{sen} x.$

3. $y'' - 2y' + y = 0; \quad y_1 = e^x, \; y_2 = xe^x.$

---

* Se integra por partes.

Hallar la ecuación de la familia de curvas integrales de la ecuación diferencial dada, y construir parte de ellas:

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$. 5. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. 6. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$.

Hallar las integrales generales de las ecuaciones diferenciales dadas, y las integrales particulares que satisfacen la condición $y=1$ si $x=1$.

7. $x^2\,dy-y^2\,dx=0$. 8. $x\frac{dy}{dx}-1=y^2$.

9. $\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}\ln x$.

Indicación. $\int \ln x\,dx$ se integra por partes.

10. $\frac{dx}{dy}=\frac{1+x^2}{\sqrt{1-y^2}}$.

Resolver las siguientes ecuaciones:

11. $\operatorname{tg} x \operatorname{sen}^2 y\,dx+\cos^2 x \operatorname{ctg} y\,dy=0$.

12. $(xy^2+x)\,dx+(x^2y+y)\,dy=0$.

13. $y'=e^{x-y}$. 14. $y'-e^{-y}+1=0$.

Resolver las ecuaciones diferenciales homogéneas siguientes:

15. $\frac{dy}{dx}=\frac{(x+y)\,y}{x^2}$. 16. $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}$.

17. $y\,dx+(x+y)\,dy=0$. 18. $y\,dx=(x+y)\,dy$.

19. $(x^2-y^2)\,dx+2xy\,dy=0$.

20. Hallar la solución particular de la ecuación $\frac{ds}{dt}=\frac{s}{t}+1$, que satisface la condición $s=\ln 2$ si $t=1$.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

21. $\frac{dy}{dx}-2y=e^{3x}$. 22. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=\frac{3}{x^2}$.

23. $\frac{dy}{dx}+\frac{ny}{x}=\frac{m}{x^n}$. 24. $\frac{ds}{dt}\operatorname{sen} t+s\cos t=1$.

25. Hallar la ecuación de una curva que pasa por el punto (1; 1), si el coeficiente angular de la tangente en cada punto es negativo e igual en valor absoluto al cuadrado de la ordenada.

26. Hallar la ecuación de una curva que pasa por el punto (1; 1), si su tangente en cada punto divide a la abscisa de dicho punto en una relación 2: 1, contando a partir del origen de coordenadas.

Indicación. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (§ 5, fórmula VI).

27. Hallar la ecuación de una familia de curvas, si el coeficiente angular de la normal en cada punto de la curva con $x > 0$ es negativo e igual en valor absoluto a la mitad del cociente entre la abscisa y la ordenada del punto de tangencia.

28. Hallar la ecuación de una familia de curvas, si la tangente en cada punto determina en el eje de las abscisas un segmento igual al doble de la ordenada del punto de tangencia.

Hallar la curva que pasa por el punto (4; 1).

29. Hallar la ecuación de una curva, si la superficie delimitada por los ejes coordenadas, dicha curva y la ordenada de un punto de ésta con $x > 0$, es igual a 1/3 de la superficie del rectángulo construido sobre las coordenadas de dicho punto.

30. Hallar la ecuación de una curva, si la superficie delimitada por los ejes coordenadas, dicha curva y la ordenada $x > 0$, es igual al cociente entre el cubo de la ordenada y la abscisa x.

31. En una columna vertical de aire la presión en cada nivel se determina por la presión de las capas superiores. Hallar la dependencia entre la presión y la altura del nivel, sabiendo que en cualquier nivel la densidad del gas es proporcional a su presión (ley de Boyle-Mariotte), si en el nivel del mar la presión es igual a 1 kg por cm^2, y a un nivel de 500 m sobre el nivel del mar es 0,92 kg por cm^2.

Indicación. La densidad del aire a un nivel h es la derivada de la presión p respecto a h. La ecuación diferencial es $\frac{dp}{dh} = -kp$. El coeficiente de proporcionalidad k y la constante arbitraria C se determinan de las condiciones: 1) $p_{h=1} = 1$, 2) $p_{h=500} = 0{,}92$.

32. En un recipiente hay 100 l de salmuera, que contienen 10 kg de sal diluida. En el recipiente entra agua con una velocidad de 3 l por minuto, y se mezcla en él inme-

diatamente; al mismo tiempo del recipiente sale mezcla con velocidad de 2 l por minuto. ¿Cuánta agua contendrá el recipiente luego del 1 hora?

Para los §§ 142. 143.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden:

33. $\frac{d^2y}{dx^2} = x + a.$ 34. $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{a^2}{s^2}.$

35. $\frac{d^2y}{dx^2} = y.$ 36. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0.$

37. $y'' + 2y' + 5y = 0.$

Hallar las soluciones particulares que satisfacen las condiciones dadas:

38. $3y'' + 2y' - y = 0.$ $y = 2,$ $y' = 6$ si $x = 0.$

39. $y'' + 2y' = 0;$ $y = 1,$ $y' = 0$ si $x = 0.$

40. $y'' + 4y = 0;$ $y = 2,$ $y' = 2$ si $x = \frac{\pi}{4}.$

41. Hallar la curva integral de la ecuación $y'' + y = 0$, tangente en el origen de coordenadas (0; 0) a la recta $y = x$.

42. El movimiento de un punto material está dado por la ecuación diferencial $\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0$. Hallar la expresión de s en función de t, si $\frac{ds}{dt} = A\omega$ para $t = 0$.

§ 17. Derivación de funciones de varias variables

Calcúlense las derivadas parciales, las diferenciales parciales y la diferencial total de las siguientes funciones:

1. $u = x \cdot y^2 \cdot z^3.$ 2. $u = \frac{y}{x}.$

3. $u = (x + a)(y + b).$ 4. $u = \frac{x^2 + y^2}{x + y}.$

5. $u = (x^2 + y^2)^n.$ 6. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

7. $u = \ln(x^2 + y^2).$ 8. $u = \ln(x^2 + xy + y^2).$

9. $u=\ln\frac{x+y}{x-y}$.

10. $u=\operatorname{sen}(x+y)$.

11. $u=\operatorname{sen}\frac{y}{x}$.

12. $u=\operatorname{sen}\frac{x+y}{z}$.

13. $u=\ln\operatorname{sen}\frac{x}{y}$.

14. $u=\ln\cos\frac{y}{x}$.

15. $u=e^{xy}$.

16. $u=e^{\frac{y}{x}}+e^{\frac{z}{x}}$.

17. $u=y^x$.

18. $u=x^{\operatorname{sen} y}$.

19. $u=\operatorname{arctg}(xy)$.

20. $u=\operatorname{arcsen}\frac{x}{y}$.

21. $u=\frac{xy}{x+z}$.

22. $u=xy\operatorname{sen}(x+y)$.

23. $u=(xy)^z$.

24. $u=z^{xy}$.

25. Un cateto de un triángulo rectángulo aumenta de 6 *cm* a 6,2 *cm*, y el otro disminuye de 8 *cm* a 7,7 *cm*. ¿Que variación (aproximada) experimenta la hipotenusa en este caso?

26. El volumen de un cono truncado se expresa por la fórmula $v=\frac{1}{3}\pi h\,(R^2+r^2+Rr)$, en la que h es la altura, y R y r son los radios de las bases del cono. Suponiendo $R=30\ dm$, $r=20\ dm$ y $h=40\ dm$, hállese aproximadamente la variación del volumen del cono al aumentar R en 0,3 *dm*, r en 0,4 *dm* y h en 0.2 *dm*. Determínese cuál es el porcentaje de esta variación respecto al volumen inicial.

27. La aceleración g se determina por medio de la fórmula $s=\frac{1}{2}gt^2$. Determínese el error relativo al calcular g, si al medir s y t se han cometido pequeños errores.

28. El área de un triángulo se determina por medio de la fórmula $s=\frac{1}{2}ab\cdot\operatorname{sen} C$. Determínese el error relativo al calcular s si al medir a, b y C se han cometido pequeños errores.

Hállese la derivada $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones implícitas:

29. $x^4+x^2y^2+y^4=0$.

30. $x^2+y^2=a(x^2-y^2)$.

31. $\operatorname{sen} x=\cos y$.

32. $\operatorname{sen} x=x\cdot\operatorname{sen} y$.

33. $y = 1 + x \cdot e^y$.

34. $x + \operatorname{arctg} y - y = 0$.

35. $x = y - a \cdot \operatorname{sen} y$.

Hállese $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$.

36. Hállese la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en el punto (x_1, y_1).

37. Hállese la ecuación de la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_1, y_1).

38. Hállese la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 2px$ en el punto (x_1, y_1).

39. En el punto de intersección de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ y la hipérbola $x^2 = \frac{y^2}{3}$, situado en el primer cuadrante, se han trazado las tangentes a la elipse y a la hipérbola. Demuéstrese que esas tangentes son perpendiculares entre sí.

40. Hállense las ecuaciones de las tangentes al círculo $y^2 = 2ax - x^2$ en los puntos cuya abscisa es a.

§ 18. Desarrollo de funciones en series de potencias

Desarróllense en potencias de x:

1. $f(x) = a^x$, $(a > 0)$.

2. $f(x) = \cos x$.

3. $f(x) = \ln(1 - x)$.

4. $f(x) = \operatorname{sen}(a + x)$.

5. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

6. $f(x) = \cos^2 x$.

7. Desarróllese e^x en potencias de la diferencia $x - 2$.

8. Desarróllese $\ln x$ en potencias de $x - 1$.

9. Desarróllese $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7$ en potencias de $x - 1$.

10. Desarróllese $f(x) = (a + x)^m$ en potencias de a.

Aplicando los desarrollos conocidos, hállense los desarrollos de las funciones:

11. $f(x) = e^{-x^2}$.

12. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

13. Calcúlese $\sqrt[5]{1{,}2}$.

14. Desarrollando $\operatorname{tg} x$ en potencias de $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, calcúlese $\operatorname{tg} 46°$.

§ 19. Respuestas e indicaciones

§ 1

2. a) (5; 2), b) $(-5; -2)$. **3.** a) $(-a; -b)$, b) $(a; b)$. **4.** a) 5 unidades de longitud, b) 3 unidades de longitud. **6. Indicación.** $AC^2 > AB^2 + BC^2$. **7.** Son posibles dos puntos: $(-7; 4)$ y $(9; 4)$. **8.** $(0; 5)$ y $(0; -3)$ **9.** $(0; -3{,}4)$. **10.** $(4; 0)$. **11.** $(8; 0)$ o $(-1; 3\sqrt{3})$. **12.** $(4; -3)$. **13.** $(1; -6)$. **14.** $\left(3; -1\frac{1}{2}\right)$, $\left(2\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; -4\right)$. **15.** $\left(0; 1\frac{2}{3}\right)$ y $\left(2; \frac{1}{3}\right)$. **16.** $(5{,}4; 2{,}8)$, $(7{,}8; 3{,}6)$ $(10{,}2; 4{,}4)$ y $(12{,}6; 5{,}2)$. **17.** a) $(-2; 0)$, b) $(0; 3)$, c) $(-2; -5)$, d) $(3; -1)$. **18.** $(11; -5)$. **19.** $(-12; 11)$. **20.** $\frac{3}{2}\sqrt{17}$. **21.** $(-2; 1)$. **Indicación.** El centro de gravedad de un triángulo es el punto que divide la mediana según la razón 2 : 1, considerado desde el vértice. **22.** $\left(2\frac{2}{3}; 5\frac{2}{3}\right)$. **Indicación.** La bisectriz divide al lado opuesto en partes proporcionales a los lados contiguos. **23.** $(3; 7)$, $(-4; 0)$ y $(1; -4)$. **24.** $(2; -3)$. **Indicación.** Las diagonales de un paralelogramo se dividen en el punto de intersección por la mitad; el vértice buscado se determina como el extremo de un segmento del que se conoce el origen y su punto medio. **25.** $(1; -3)$ y $(-4; 0)$. **26.** $x = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3}{P_1 + P_2 + P_3}$, $y = \frac{P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3}{P_1 + P_2 + P_3}$. **Indicación.** Es necesario en primer lugar determinar las coordenadas del punto de aplicación de la resultante de las dos fuerzas P_1 y P_2, y después determinar las coordenadas del punto de aplicación de la resultante de $P_1 + P_2 + P_3$. Es sabido que la resultante de dos fuerzas P_1 y P_2 es igual a su suma $P_1 + P_2$ y está aplicada en el punto M, situado en el segmento M_1M_2, al cual lo divide en dos partes en razón inversamente proporcional a las fuerzas. **27.** La fórmula no da valores determinados para las coordenadas del punto de aplicación de la resultante, puesto que $P_1 + P_2 + P_3 = 6 + (-18) + 12 = 0$, es decir, la resultante es nula, y una resultante igual a cero puede ser aplicada en cualquier punto del plano. **28.** a) 45°, b) 135°, c) 0°. **31.** En ambos casos son iguales por su magnitud absoluta y de signo contrario.

§ 2

1. a) $6x + 8y + 7 = 0$; b) $2x - 5y = 0$. **2.** a) $y = 2$, b) $x = 2\frac{1}{2}$. **3.** a) $(3; 7)$, b) $(5; 13)$. **4.** La primera recta pasa por los puntos A, C y E, la segunda pasa por los puntos A, B y D. El punto A es el punto de intersección de las rectas dadas. Las rectas no pasan por el origen de los ejes. 5. a) $y = -\frac{5}{3}x + 5$; b) $y = \frac{4}{7}x + 4$.

Indicación. Se halla k por medio de la fórmula (VI) § 5. **6.** a) $y = x+3$, b) $y=3-x$, c) $y-3$. **7.** a) $y=\frac{x}{\sqrt{3}}-5$; b) $y=-(x\sqrt{3}+5)$, c) $y=-5$. **8.** a) $y=\pm x$, b) 1) $y=-3$, $x=2$; 2) $y=-1$, $x=-5$; 3) $y=0$, $x=-3$; 4) $y=4$, $x=0$. **9.** $y=0{,}3x+2{,}7$. **10.** $y=-\frac{3}{4}x$. **11.** Una recta cuyo coeficiente angular es igual al valor de la velocidad v, y la ordenada inicial es igual al valor s_0. **12.** 18 metros por minuto. **13.** $y=\frac{P}{2}+\frac{p}{l}\cdot x$. Indicación. El peso de la viga P se distribuye uniformemente en los dos apoyos; el peso de la persona p se distribuye en los apoyos en razón inversamente proporcional a las distancias hasta estos apoyos. **14.** a) $k=-\frac{5}{12}$, $\varphi=157°23'$; b) $k=\frac{3}{4}$, $\varphi=36°52'$; c) $k=\frac{1}{2}$, $\varphi=26°31'$; d) $k=-\frac{3}{4}$, $\varphi=143°08'$. **15.** a) $k=1$, $b=2$; b) $k=-2$, $b=1$; c) $k=2$, $b=-\frac{1}{2}$; d) $k=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{3}$; e) $k=\frac{1}{5}$, $b=0$; f) $k=0$, $b=-\frac{3}{2}$. **16.** a) 4 y -6, b) $\frac{2}{3}$ y 2. **19.** a) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$; b) $\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{3}=1$; c) $\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1$; d) $\frac{x}{-\frac{5}{3}}+\frac{y}{\frac{5}{2}}=1$. **20.** a) $\left(\frac{1}{3};\ 3\frac{2}{3}\right)$; b) $(-1;\ +1)$; c) las rectas son paralelas. **21.** $3x-4y\mp 12=0$ y $3x+4y\mp 12=0$. **22.** $x-y=0$ y $x+y+a=0$. **23.** $x+y-5=0$. **24.** $5x+3y-30=0$. **25.** a) $x-y-1=0$, b) $x+y-5=0$. **26.** $x\sqrt{3}\mp y\pm 2-6\sqrt{3}=0$. **27.** (6; 0), $y=-\frac{2}{3}x+4$. **28.** a) $x+3y-5=0$; b) $2x-y+5=0$; c) $x=2$; d) $y=-3$. **29.** a) Están situadas, b) no están situadas. **30.** a) 11, b) 3. **31.** a) 45°, b) 60°; c) 78°41′, d) 0, e) 90°. **32.** a) -2; b) $\sqrt{3}$. c) 0. **33.** a) 26°34′; 18°26′ y 135°; b) 45°, 90° y 45°. **34.** a) las dos primeras son paralelas entre sí y perpendiculares a la tercera; b) la primera y tercera son paralelas entre sí y perpendiculares a la segunda. **35.** a) $y=-2x$; b) $y=3x-15$; c) $y=-6$; d) $x=3$. **36.** a) $x+y=0$; b) $x-2y=0$; c) $y=0$; d) $x=0$. **37.** $y=2x$. **38.** $y=-2x$. **39.** $x+2y-10=0$ y $2x+4y+5=0$. **40.** $9x-y-16=0$ y $x+9y-20=0$. **41.** $x=3$ e $y=5$. **42.** $2x+y-7=0$; $x-2y-6=0$. **43.** $3x+4y-18=0$. **44.** $7x+35y-55=0$. **45.** a) $4x-y-6=0$; b) $x+4y+7=0$; c) $3x-5y-13=0$ y $5x+3y+1=0$. **46.** AB en razón $4:1$, CD en razón $2:3$. **47.** $4x-3y-17=0$. **48.** (2; -3). **49.** a) 2; b) 3. **50.** a) 0; b) 5,2. **51.** (10, 21). **52.** 0,5. **53.** $3x-4y+5=0$ y $3x-4y-15=0$. Indicación. El problema tiene dos soluciones, puesto que la recta situada a dos unidades de escala de la recta dada puede trazarse por una y por la otra parte de la recta dada. Por eso, si la primera distancia entre la recta dada y la buscada es igual $a+2$, la otra debe considerarse igual $a-2$. **54.** $\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. **55.** $x-7y-2=0$.

56. $M(1;\ 0)$. Indicación. La línea quebrada AMB tiene la longitud mínima si el rayo del punto A pasa por el punto M hasta el punto B de tal modo que el ángulo de incidencia del rayo AM al eje Ox es igual al ángulo de reflexión del mismo. **57.** 45°. **58.** $\frac{A_2x+B_2y+C_2}{A_2x_0+B_2y_0+C_2}-\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1x_0+B_1y_0+C_1}=0$. Indicación. Convendremos en que x e y son las coordenadas del punto de intersección, es decir, los valores que satisfacen a cada una de las ecuaciones dadas. Ambas ecuaciones representan una misma recta si sus coeficientes son proporcionales (§ 13, 2°), o sea, si $A_2x+B_2y+C_2=0$ y $\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=0$. De aquí que la ecuación de cualquier recta que pase por el punto de intersección de las rectas dadas puede escribirse así: $A_2x+B_2y+C_2-\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=0$. λ se determina por la condición de que la recta pasa por el punto $M_0(x_0,\ y_0)$. **59.** $x+y-11=0$ y $3x-y-16=0$. **60.** a) $3x+y-7=0$, $3x+y-17=0$, $x-3y+1=0$ y $x-3y+11=0$; b) $7x-y-26=0$; $x+7y-18=0$; $7x-y+24=0$, $x+7y-68=0$. **61.** $(4;\ -6)$ o $(2{,}4;\ -6{,}8)$. **62.** El centro del círculo $O(4;\ 5)$.

§ 3

1. a) $x^2+y^2-6x+10y+18=0$; b) $x^2+y^2+4x-2y=0$; c) $x^2+y^2+6x-32=0$. **2.** $x^2+y^2+3x-4y=0$. **3.** $3x^2+3y^2-16x-7=0$. **4.** $x^2+y^2-10y=0$. **5.** $x^2+y^2-4x-6y+4=0$. **6.** $x^2+y^2-2x+2y+1=0$; $x^2+y^2-10x+10y+25=0$. **7.** $(x+1)^2+y^2=16$ y $(x-3)^2+(y-4)^2+16$. **8.** $(x-1)^2+(y+6)^2=25$ y $(x-8)^2+(y-1)^2=25$. **9.** a) $x^2+y^2-8x+6y=0$; b) no es posible, los puntos están situados en una misma recta. **10.** $(x-4)^2+(y+3)^2=25$. **11.** a) $(0;\ 3)$. $r=3$; b) $(-4;\ 0)$, $r=5$; c) $(5;\ -2)$, $r=4$; d) $\left(1\frac{1}{2};\ 2\right)$, $r=\frac{3\sqrt{7}}{2}$; e) $\left(1\frac{1}{4};\ -\frac{3}{4}\right)$, $r=\frac{3\sqrt{10}}{4}$; f) una circunferencia de radio nulo con el punto real $(6;\ -1)$, g) una circunferencia imaginaria. **12.** $x^2+y^2+6x+5=0$. **13.** $x^2+y^2+3x-4y-0$. **14.** $x^2+y^2=49$. **15.** a) La circunferencia es tangente al eje de las abscisas en el punto $(3;\ 0)$ y corta el eje de coordenadas en los puntos: $(0;\ 9)$ y $(0;\ 1)$; b) la circunferencia es tangente al eje de las abscisas en el punto $(5;\ 0)$ y no se corta con el eje de las ordenadas. **16.** a) Se corta en los puntos $(5;\ 0)$ y $(-3;\ -4)$; b) son tangentes en el punto $(-3;\ -4)$; c) la recta está situada fuera del círculo. **17.** $a=\pm 30$, $b=48$.

§ 4

1. a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; b) $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{400}=1$; c) $\frac{x^2}{676}+\frac{y^2}{192}=1$. **2.** $\frac{y^2}{9}+y^2=1$. **3.** $\frac{x^2}{289}+\frac{y^2}{225}=1$. **4.** $\frac{4x^2}{289}+\frac{y^2}{16}=1$. **5.** $16x^2+25y^2=1600$.

6. $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{576}=1$. **7.** $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$. **8.** $9x^2+25y^2=225$. **9.** $9x^2+25y^2=$ $=225$. **10.** $8x^2+9y^2=162$. **11.** a) $x^2+4y^2=100$; b) $2x^2+3y^2=180$. **12.** a) $2a=26$, $2b=10$, $F\ (12;\ 0)$, $F_1\ (-12;\ 0)$, $e=\frac{12}{13}$; b) $2a=2\sqrt{10}$, $2b=2\sqrt{6}$, $F\ (2;\ 0)$, $F_1\ (-2;\ 0)$, $c=\frac{\sqrt{10}}{5}$; c) $2a=8$, $2b=8\sqrt{2}$, $F\ (0;\ 4)$, $F_1\ (0;\ -4)$, $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $2a=\frac{4}{3}$, $2b=\frac{4}{5}$, $F\left(\frac{8}{15};\ 0\right)$, $F_1\left(-\frac{8}{15};\ 0\right)$, $e=0{,}8$; e) $2a=3$, $2b=5\frac{1}{3}$, $F\left(0;\ \frac{5}{6}\sqrt{7}\right)$, $F_1\left(0;\ -\frac{5}{6}\sqrt{7}\right)$, $e=\frac{5\sqrt{7}}{16}$. **13.** La elipse $x^2+4y^2=36$. **14.** a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{10}}{5}$; c) $\frac{1}{m}\sqrt{m^2-1}$. **15.** $\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}$. **16.** $e\approx 0{,}08$. **17.** $2c=$ $=5{,}1\times 10^6\ km$. **18.** $\left(-\frac{15}{2};\ \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{15}{2};\ -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$. **19.** Indicación. Los lados del ángulo recto deben ser tomados por los ejes de coordenadas; los segmentos AM y MB deben tomarse iguales a a y b, y entonces $\frac{x}{a}=\cos\varphi$ y $\frac{y}{b}=\operatorname{sen}\varphi$. Para eliminar φ es necesario elevar estas igualdades al cuadrado y sumarlas. **20.** a) $AB=5$, $AM=3$, $MB=2$; b) $AB=5$; $AM=4$; $MB=1$; c) $AB=10$; $AM=MB=5$. **21.** Indicación. En el triángulo C_1OC_2, la hipotenusa $C_1C_2=r_2-r_1$, y los catetos $OC_1=a-r_1$ y $OC_2=r_2-b$. Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene la dependencia buscada en la forma:

$$(a-r_1)^2+(r_2-b)^2=(r_2-r_1)^2.$$

Abriendo los paréntesis y sumando a los dos miembros de la igualdad $-2ab$, se puede presentar esta dependencia así:

$$(b-r_1)\ (r_2-a)=\frac{(a-b)^2}{2}.$$

22. Indicación. Las coordenadas del punto M:

$$x=(a-b)\cdot\cos\varphi,\quad y=(a+b)\cdot\operatorname{sen}\varphi.$$

Aplicando el procedimiento indicado en el problema 19 se obtiene la ecuación:

$$\frac{x^2}{(a-b)^2}+\frac{y^2}{(a+b)^2}=1,$$

es decir, la curva es una elipse. Tal aparato de dos listones sujetos por un *tornillo se emplea para dibujar grandes elipses (por ejemplo,* al dibujar bóvedas).

§ 5

1. a) $\frac{x^2}{121}-\frac{y^2}{48}=1$; b) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{81}=1$; c) $\frac{4x^2}{49}-\frac{y^2}{8}=1$. **2.** $x^2-\frac{y^2}{8}=1$. **3.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$. **4.** $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{45}=1$. **5.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$. **6.** $9x^2-16y^2=144$. **7.** $9x^2-8y^2=72$. **8.** a) $F(\pm 10;\ 0)$, $e=\frac{5}{3}$, $y=\pm\frac{4}{3}x$; b) $F(\pm 4;\ 0)$, $e=0{,}4\sqrt{10}$, $y=\pm x\sqrt{0{,}6}$; c) $F\left(\pm 2\frac{5}{6};\ 0\right)$, $e=\frac{17}{15}$, $y=\pm\frac{8}{15}x$. **9.** a) $x^2-4y^2=8$; b) $9x^2-16y^2=20$. **10.** $120°$. **11.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{2}$. **12.** $e=\left|\frac{1}{\cos\varphi}\right|$. **13.** a) 2 y 32; b) 34 y 4. **14.** $x=9\frac{3}{5}$, $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{119}$ (2 puntos). **15.** $x_0=\pm a\sqrt{2-\frac{1}{e^2}}$; $y_0=\pm b\sqrt{1-\frac{1}{e^2}}$ (4 puntos). Indicación. Puesto que los radios vectores que unen el punto $(x_0,\ y_0)$ con los focos son perpendiculares entre sí, la suma de los cuadrados de sus longitudes es igual al cuadrado de la distancia focal:

$$(ex_0-a)^2+(ex_0+a)^2=4c^2.$$

De esta ecuación se determina la abscisa x_0, y sustituyendo sus valores en la ecuación de la hipérbola, se halla y_0. **16.** $x^2-y^2=12$. **17.** a) $xy=6$, b) $xy=4$. **18.** a) $x^2-y^2=6$; b) $x^2=y^2=10$. **19.** $9x^2-16y^2=144$. **20.** $9x^2-7y^2=63$. **21.** a) $a_4=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; b) $a_4=\frac{2ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$. La resolución es posible si $b>a$. **22.** $4x\pm 3y-20=0$. **23.** a) $\left(5;\ -5\frac{1}{3}\right)$, $\left(-3\frac{3}{4};\ 3\right)$; b) en el punto infinitamente alejado, la recta sirve de asíntota, c) no se cortan. **24.** $(2;\ \pm 2)$ y $(-2;\ \pm 2)$. **25.** $\left(5\frac{3}{5};\ \pm\frac{6\sqrt{6}}{5}\right)$ y $\left(-5\frac{3}{5};\ \pm\frac{6\sqrt{6}}{5}\right)$.

§ 6

1. a) $y^2=16x$; b) $x^2=-12y$. **2.** a) $y^2=-4x$; b) $x^2=8y$. **3.** a) $y^2=4x$; b) $y^2=-8x$. **4.** a) $2x^2=9y$; b) $3x^2=-4y$. **5.** $|p|=2\frac{2}{3}$. **6.** $p=\frac{10}{3}$. **7.** 112 *mm*. **8.** a) $\frac{x}{a}+\frac{y^2}{b^2}=1$; b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y}{b}=1$. **9.** Indicación. Tomando la ecuación de la parábola (véase el problema 8 b), se tiene: $\frac{4x^2}{l^2}+\frac{y}{f}=1$. De aquí que $y=f\left(1-4\frac{x^2}{l^2}\right)$. La anchura de cada parte de la luz $\delta=\frac{l}{2n}$. Las abscisas y las ordenadas se cuen-

tan desde el punto medio (origen O), además $x_k = \delta_k = \frac{lk}{2n}$. El puntal (la viga vertical) tiene para esta abscisa la longitud $y_k = f\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)$, donde $k=1, 2, \ldots, n-1$. La longitud de la viga diagonal d_k, inclinada hacia el centro de la armazón, se determina por la fórmula de la distancia entre dos puntos con las coordenadas: $\left(\frac{lk}{2n}, 0\right)$ y $\left(\frac{l(k-1)}{2n}; y_{k-1}\right)$, donde $y_{k-1} = f\left[1-\frac{(k-1)^2}{n^2}\right]$,
$d_k = \sqrt{f^2\left[1-\frac{(k-1)^2}{n^2}\right]^2+\frac{l^2}{4\pi^2}}$.

La longitud de la viga diagonal d'_k inclinada hacia los extremos de la armazón se halla análogamente:

$$d'_k = \sqrt{f^2\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)^2+\frac{l^2}{4n^2}}.$$

Observamos que $d'_k = d_{k+1}$, es dedir, dos vigas diagonales que se unen en un punto de la parábola son iguales. Esta propiedad hace que la armazón parabólica sea mejor técnicamente que las armazones de otras formas.

Respuesta: $\delta = 2{,}5\,m$, $y_1 = 4{,}69\,m$, $y_2 = 3{,}75\,m$, $y_3 = 2{,}19\,m$, $d_1 = 5{,}60\,m$, $d_2 = d'_1 = 5{,}31\,m$, $d_3 = d'_2 = 4{,}51\,m$ y $d_4 = d'_3 = 3{,}32\,m$. **10.** Indicación. La ecuación de la parábola superior: $y = (f+f')\left(1-4\frac{x^2}{l^2}\right)$; la ecuación de la parábola inferior: $y' = f'\left(1-4\frac{x^2}{l^2}\right)$. Para $x_k = \frac{lk}{2n}$ la longitud del puntal $z_k = y_k - y'_k = f\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)$.

Las longitudes de las diagonales:

$$d_k = \sqrt{(y_{k-1}-y'_k)^2+\delta^2} = \sqrt{\left[f\left(1-\frac{(k-1)^2}{n^2}\right)+f'\,\frac{2k-1}{n^2}\right]^2+\frac{l^2}{4n^2}},$$

$$\delta'_k = \sqrt{(y_k-y'_{k-1})^2+\delta^2} = \sqrt{\left[f\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)+f'\,\frac{2k-1}{n^2}\right]^2+\frac{l^2}{4n^2}}.$$

Respuesta: $\delta = 2{,}5\,m$; $y_1 = 4{,}68\,m$, $y_2 = 3{,}75\,m$, $y_3 = 2{,}18\,m$, $y'_1 = 2{,}81\,m$, $y'_2 = 2{,}25\,m$, $y'_3 = 1{,}31\,m$; $z_1 = 1{,}87\,m$, $z_2 = 1{,}50\,m$, $z_3 = 0{,}87\,m$; $d_1 = 3{,}32\,m$, $d_2 = 3{,}48\,m$, $d_3 = 3{,}49\,m$, $d_4 = 3{,}32\,m$; $d'_1 = 3{,}02\,m$, $d'_2 = 2{,}67\,m$, $d'_3 = 2{,}50\,m$, d'_4 (la cuerda) $= 2{,}82\,m$. **11.** a) $(x-2)^2 = 8(y-3)$; b) $(x-3)^2 = -12y$; c) $(y+2)^2 = 12(x-1)$; d) $y^2 = -8(x-2)$. **12.** a) $x^2-8x-12y+28=0$; b) $x^2-6x+8y+17=0$; c) $y^2+8x-2y-7=0$; d) $y^2+4x+4=0$. **13.** a) $y^2-10x+25=0$; b) $x^2-4x-8y+12=0$; c) $y^2+6x-4y+7=0$. **14.** a) $x^2-4x-4y=0$; b) $y^2+4x-6y+1=0$. **15.** a) $O'(2; 1)$; $p=5$, el eje es $\parallel OX$; b) $O'(0; -7)$, $p=3$, el eje es $\parallel Ox$; c) $O'(2; 0)$, $p=4$, el eje coincide con la dirección negativa del eje Ox; d) $O'(3; 5)$, $p=-2$, el eje es $\parallel Oy$; e) $O'(4; -1)$, $p=\frac{1}{2}$, el eje es $\parallel Oy$; f) $O'(-3; -9)$, $p=\frac{1}{2}$, el eje es $\parallel Oy$; g) $O'(1; 1)$, $p=-\frac{1}{2}$, el eje es $\parallel Oy$; h) $O'\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$; $p=-\frac{1}{2}$; el eje es $\parallel Oy$. **16.** a) $O'(-3; 0)$, $r=4$; b) $O'(5; -1)$, $r=5$. **17.** a) $O'(1; -2)$, $a=5$, $b=3$; b) $O'(-1; -1)$, $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{5}$. **18.** a) $(16; \pm 8)$, *b*) $(8; \pm 8)$. **19.** $x=2$.

§ 7

2. 3. **3.** $26°34'$. **4.** $4x^2+4y^2-60x-60y+225=0$ y $64x^2+64y^2+240x-240y+225=0$. **6.** $\frac{p}{2}$ y $p\sqrt{2}$; $y=\pm 2x\sqrt{2}$. **7.** $25x^2+25y^2=114$. **8.** $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$; $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; $M_{1,2}\left(\frac{21}{\sqrt{13}}; \pm\frac{12}{\sqrt{13}}\right)$; $M_{3,4}\left(-\frac{21}{\sqrt{13}}; \pm\frac{12}{\sqrt{13}}\right)$. **9.** $x+5y-3=0$.

§ 8

2. Indicación. $\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Suponiendo $\frac{\pi}{2}-x=y$, se tiene: si $x\longrightarrow\frac{\pi}{2}$, entonces $y\longrightarrow 0$. **3.** Indicación. $|\cos x-1|=|1-\cos x|=2\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2<2\cdot\frac{x^2}{4}=\frac{1}{2}x^2$. **7.** 2. **8.** 1. **9.** $-\frac{1}{3}$. **10.** 0. **11.** $\frac{4}{3}$. **12.** $\frac{2}{5}$. **13.** $\frac{1}{2}$. **14.** $\frac{3}{2}a$. **15.** -1. **16.** -1. **17.** $\frac{a}{k}$. **18.** 0. **19.** 0. **20.** ∞. **21.** -1. **22.** $\frac{1}{2a}$. **23.** $\frac{\sqrt{3}}{36}$. **24.** 0.

§ 9.

1. -3. **2.** x^2+2 y $x^2+8x-14$. **3.** $\frac{x^2-4x+5}{x^2-4x+4}$. **6.** 2; -3. **7.** $f(1)=0$, $f(-2)=0$. **8.** $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$. **9.** $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)}$. **11.** a) $-2\leqslant x\leqslant +2$, b) $-1\leqslant x\leqslant 3$, c) $1\leqslant x\leqslant +\infty$, d) $-2<x<+2$ **13.** $3x^2\Delta x+3x\cdot\Delta x^2+\Delta x^3=1{,}261\ m^3$. **14.** $3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-2\Delta x=0{,}100601$. **15.** $-\frac{2\Delta x}{(x-1+\Delta x)(x-1)}$ **16.** $\lg\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$. **17.** a) 0; b) 1; c) -1 y $+1$; d) -3. Indicación. $x=-7$ transforma el quebrado en $\frac{0}{0}$, es necesario simplificar por $x+7$, e) $\frac{7}{3}$; f) 0. **19.** Es continua. **20.** Indicación: $\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

§ 10.

2. 12. **3.** $b-2ct$; $t=\frac{b}{2c}$. **4.** 1,00425 *kcal*. **5.** $2\cdot10^7$ erg. **6.** $\frac{\pi d}{16}$. **7.** a) 0; b) 6; c) -4; d) 4 y 2. **8.** a) $3x^2$; b) 12; c) no puede. **9.** a) $y=-\frac{1}{x_1^2}x+2y_1$; b) $y=-x+2$; c) $y=-4x-4$; d) no puede. **10.** 0 y $\frac{2}{3}$. **11.** $\operatorname{arctg} 3=71°34'$. **12.** 90° y $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=36°52'$. **13.** (2; 4).

§ 11

1. $6(x-1)$. **2.** $2x(10x^2+1)$. **3.** x^3-x+1. **4.** $\frac{3}{5}x^2-\frac{2}{3}x-1$. **5.** $2x(2ax^2+b)$. **6.** $3ax^2+2bx-c$. **7.** $x^2(4-2x^2+x^4)$. **8.** $-\frac{21x^5}{4}+5x^3-3x$. **9.** $-\frac{4ax^3}{b}-\frac{bx}{a}$. **10.** $\frac{3x^2}{a+b}-\frac{2x}{a-b}-\frac{1}{ab}$. **11.** $ax^{a-1}-b\cdot x^{b-1}+3abx^{ab-1}$. **12.** $2ax^{2a-1}-2x^{\lg 2-1}\cdot\lg 2$. **13.** $kx^{k-1}-2\pi x^{\pi-1}$. **14.** $21x^{\frac{5}{2}}+10x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}$. **15.** $-6x^{-3}+x^{-\frac{3}{2}}+1$. **16.** $\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}+6\sqrt[5]{x}$. **17.** $2x\sqrt{3}+\frac{15\sqrt{x}}{2}$. **18.** $-\frac{2}{x^3}+\frac{21}{x^4}$. **19.** $\frac{4a}{3x^5}-\frac{6a^2}{x^3}$. **20.** $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{4x\sqrt{x}}$. **21.** $-2(1+35x)$. **22.** $-4x(10x^3-3x+1)$. **23.** $40x^3+33x^2+50x-1$. **24.** $-2(1-x+3x^5)$. **25.** $2acx+ad+bc$. **26.** $3acx^2+2bcx+ad$. **27.** $2(9x^2+x-1)$. **28.** $2x(3x^4-28x^2+49)$. **29.** $\frac{5(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. **30.** $-\frac{2}{(1+x)^2}$. **31.** $-\frac{6x^2}{(1+x^3)^2}$. **32.** $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. **33.** $\frac{2ax(k+l)}{(l-ax^2)^2}$. **34.** $\frac{1}{a}-\frac{a}{x^2}+\frac{2x}{b^2}-\frac{2b^2}{x^3}$. **35.** $\frac{2}{5}-\frac{5}{2x^2}$. **36.** $\frac{1}{3}+\frac{12x}{(4-x^2)^2}$. **37.** $3-\frac{27}{(2-x)^2}$. **38.** $\frac{b^2}{(a-x)^2}-\frac{a^2}{x^2}$. **39.** $-\frac{acnx^{n-1}}{(b+cx^n)^2}$. **40.** $\frac{dz}{dt}=\frac{1-2t}{(t^2-t+1)^2}$. **41.** $\frac{dz}{dt}=\frac{1-3t^2}{\sqrt{\pi}}$. **42.** $F'(1)=16$. **43.** $F'(a)=-\frac{1}{2a+(1+a)\sqrt{a}}$. **44.** $F'(a)=\frac{1+a}{2a\sqrt{a}}$. **45.** $s'(0)=\frac{3}{25}$; $s'(2)=1\frac{2}{15}$. **46.** $\rho'(2)=-\frac{3}{25}$; $\rho'(0)=1$. **47.** $30x(3x^2+8)^4$. **48.** $-84x^2(5-4x^3)^6$. **49.** $3(2ax+b)\cdot(ax^2+bx+c)^2$. **50.** $8x(2mx^2+n)(mx^4+nx^2+p)^3$. **51.** $k(x^m+x^n)^{k-1}(mx^{m-1}+nx^{n-1})$. **52.** $p(amx^{m-1}+bnx^{n-1})(ax^m+bx^n)^{p-1}$. **53.** $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$. **54.** $\frac{2cx+b}{3\sqrt[3]{(a+bx+cx^2)^2}}$. **55.** $4ab$. **56.** $-\frac{7x}{\sqrt{1+x^2}}$. **57.** $\sqrt{5}-\frac{3}{\sqrt{3x+5}}$. **58.** $2(4x\sqrt{3}+15\sqrt{x})\times(x^2\sqrt{3}+5\sqrt{x^3})^3$. **59.** $-\frac{42x}{(x^2-1)^4}$. **60.** $\frac{40x}{(3-2x^2)^3}$.

61. $-\dfrac{ax}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}}$. 62. $-\dfrac{an}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^{n+1}}$. 63. $\dfrac{x\,(3x^2-2)}{\sqrt{1-x^2}}$.
64. $\dfrac{2x\,(4x^2+5)}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$. 65. $\dfrac{1}{2\sqrt{2x}\,(2+\sqrt{2x})}$. 66. $\dfrac{a}{4\sqrt{ax\,(a+\sqrt{ax})}}$.
67. $\dfrac{5bx^2+4x+ab}{2\sqrt{1+bx}}$. 68. $\dfrac{x\,(45x^2+16)}{\sqrt{1+5x^2}}$. 69. $\dfrac{2\,(4-x-x^2)}{(x-1)^5}$.
70. $-\dfrac{60x^2}{(5x-4)^4}$. 71. $(120x+161)\cdot(3x+5)^2\,(5x+4)^4$. 72. $x\,(36x+41)\times$ $\times(3x-2)\,(2x+3)^2$. 73. $(x+a)^{m-1}\,(x+b)^{n-1}\,[(m+n)\,x+mb+na]$
74. $\dfrac{(a+x)^{m-1}\,[(n-m)\,x+mb+na]}{(b-x)^{n+1}}$. 75. $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x^2-1}}$.
76. $\dfrac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4-1}}$. 77. $-\dfrac{a^2}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$. 78. $-\dfrac{3}{x^4\sqrt[5]{(1+x^5)^2}}$.
79. $\dfrac{x\,(4+x^3)}{2\,(1+x^3)\sqrt{1+x^3}}$. 80. $\dfrac{2\,(3-x^2)}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^5}}$. 81. $\dfrac{nx^{n-1}\,(2+\sqrt{x})}{2\,(1+\sqrt{x})^{n+1}}$.
82. $-\dfrac{1}{2\,(x+\sqrt{x})\sqrt{1-x}}$. 83. k. 84. 1. 85. $\dfrac{5}{3}$. 86. 1. 87. $n\cos nx$.
88. $nx^{n-1}\cdot\cos x^n$. 89. $n\cdot\operatorname{sen}^{n-1}x\cdot\cos x$. 90. $-ma^m x^{m-1}\operatorname{sen}(ax)^m$.
91. $-am\cos^{m-1}ax\cdot\operatorname{sen}ax$. 92. $-\dfrac{a}{\operatorname{sen}^2 ax}$. 93. $bn\operatorname{tg}^{n-1}bx\cdot\sec^2 bx$.
94. $4\cos^2 x$. 95. $\dfrac{dy}{d\varphi}=\operatorname{tg}^2\varphi$. 96. $\dfrac{dy}{d\varphi}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\dfrac{\varphi}{2}$. 97. $\dfrac{d\rho}{d\theta}=-2a\operatorname{sen}2\theta$.
98. $\dfrac{d\rho}{d\theta}=-\dfrac{k\operatorname{sen}2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$. 99. $\dfrac{dx}{dt}=r\,(1-\cos t)$. 100. $\dfrac{dy}{dt}=r\cdot\operatorname{sen}t$.
101. $\dfrac{dy}{dx}=6\,(\cos 3x-\operatorname{sen}2x)$. 102. $\dfrac{dy}{dt}=A\cdot\omega\cdot\cos(\omega t+a)$. 103. $\dfrac{ds}{dt}=$ $=\dfrac{a}{t^2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{a}{t}$. 104. $\dfrac{ds}{dt}=-\dfrac{2}{t^3}\cdot\cos\dfrac{1}{t^2}$. 105. $\dfrac{dy}{dx}=-2\cdot\operatorname{sen}4x$. 106. $\operatorname{sen}x$.
107. $-\dfrac{3a}{x^3}\cdot\operatorname{sen}^2\dfrac{1}{x}\cdot\cos\dfrac{1}{x}$. 108. $-\operatorname{sen}x\cdot\cos(\cos x)$. 109. $-\cos x\cdot\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)$.
110. $-3\operatorname{cosec}^4 x$. 111. $\sec^6 x$. 112. $\operatorname{tg}^4\dfrac{x}{2}$. 113. $\sqrt{1+\operatorname{sen}2x}+$ $+\sqrt{1-\operatorname{sen}2x}$. 114. $\dfrac{\operatorname{sen}x-x\cdot\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$. 115. $\sqrt{2}\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)$.
116. $\operatorname{sen}x\cdot\cos 2x+\operatorname{sen}3x$. 117. $2\operatorname{sen}2x\cdot\cos^2 x$. 118. $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=$ $=-4\sqrt{3}$. 119. $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=4\sqrt{3}$. 120. $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a$. 121. $f'(\pi)=\dfrac{2}{9}$.
122. $a\left(\operatorname{tg}ax+\dfrac{ax}{\cos^2 ax}\right)$ 123. $a\cdot\operatorname{tg}ax\cdot\sec ax$ 124. $ax\sec^n x\cdot\operatorname{tg}ax$.
125. a) $\ln 2=0{,}69315$, $\ln 7=1{,}94591$, $\ln 13=2{,}56495$; b) $\lg 3=0{,}47712$, $\lg 5=0{,}69897$, $\lg 11=1{,}04139$. 126. $\dfrac{1}{(3+x)\ln a}$. 127. $\dfrac{2x}{(1+x^2)\ln a}$.
128. $\dfrac{2x}{x^2-a^2}$. 129. $\dfrac{3}{5+3x}$. 130. $\dfrac{2x}{3\,(a^2+x^2)}$ 131. $\dfrac{3}{x-5}+\dfrac{2}{x+4}$.

132. $\frac{3(1+\ln^2 x)}{x}$. 133. $\frac{1}{2x\cdot\ln a}$. 134. 0. 135. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.
136. $\frac{1}{x\ln x}$. 137. $\frac{1}{2(x+1)}$. 138. $\frac{2a}{a^2-x^2}$. 139. $\frac{n}{x(1+x^n)}$.
140. $\frac{2(1+\log_a x)}{x\cdot\ln x}$. 141. $\frac{3\cdot\log_a^2 2x}{x\cdot\ln a}$. 142. $\frac{2x}{3(1+x^2)}$. 143. $\frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$.
144. $\frac{1+x}{x(x+\ln x)}$. 145. $\frac{an}{x}$. 146. $\frac{an\cdot\ln^{n-1}x}{x}$. 147. $2\operatorname{cotg}2x$. 148. $-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.
149. $2\operatorname{cotg}x$. 150. $\operatorname{cotg}2x$. 151. $\frac{1}{\cos x}$. 152. $\frac{\cos\ln x}{x}$. 153. $\frac{1}{x\cdot\cos^2\ln x}$.
154. $2(x-1)\cdot 5^{x^2-2x}\cdot\ln 5=(x-1)\cdot 5^{x^2-2x}\cdot\ln 25$. 155. $(x^2-1)\cdot 2^{x^3-3x}\ln 8$.
156. $x\cdot 3^{1+x^2}\cdot\ln 3$. 157. $nx^{n-1}+n^x\cdot\ln n$. 158. $\frac{n^{2x}-1}{e^x}$.
159. $e^{\frac{x}{2}+\frac{2}{x}}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}\right)$. 160. $\frac{d\rho}{d\varphi}=a^\varphi\cdot\ln a$. 161. $\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{a^{\ln\varphi}\cdot\ln a}{\varphi}$.
162. $\frac{a\cdot e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$. 163. $a^{\frac{x}{e}}\cdot\ln a$. 164. $5^{\operatorname{sen}^2 x}\cdot\operatorname{sen}2x\cdot\ln 5$. 165. $\frac{n\cdot a^{\operatorname{tg}nx}\cdot\ln a}{\cos^2 nx}$.
166. $-\frac{e^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}}{\left(x\cdot\cos\frac{1}{x}\right)}$. 167. $a^{e^x}\cdot e^x\cdot\ln a=a^{e^x}$. 168. $e^{a^x}\cdot a^x\cdot\ln a$.
169. $e^{2x}(2x-5)-4e^x(1+x)$. 170. $x^2\cdot e^x(\cos x-\operatorname{sen}x)+2x\cdot e^x\cdot\cos x$.
171. $\frac{1-\ln x}{x^2}$. 182. $\ln x$. 173. $e^{x\ln x}(1+\ln x)$. 174. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.
175. $\frac{4\ln a}{(a^x+a^{-x})^2}$. 176. $-x\cdot\operatorname{cotg}^2 x$. 177. $x\cdot\ln\operatorname{tg}x+\frac{x^2}{\operatorname{sen}2x}+\cos x$.
178. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}$. 179. $f'\left(\frac{1}{2}\right)-\pi\cdot e^{\frac{\pi}{2}}$. 180. $2ae^{ax}\cdot\operatorname{sen}ax$.
181. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=4$. 182. $f'(e)=\frac{1}{3e}$. 183. $f'(e)=\frac{4}{3}$. 184. $\frac{2}{x\cdot\ln x}$.
185. $f'(0)=1$. 186. $14x-1$. 187. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 188. $\frac{1}{2\sqrt{x(x+a)}}$.
189. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x^2-1}}$. 190. $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 191. $\frac{1}{x^2+1}$. 192. $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
193. $\frac{e^{\operatorname{arc\,sen}x}}{\sqrt{1-x^2}}$. 194. -1. 195. -1. 196. $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$. 197. $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.
198. $\frac{1}{x}$. 199. $\frac{\operatorname{cotg}x}{1+\ln^2\operatorname{sen}x}$. 200. $\frac{a}{a^2+x^2}$. 201. $\operatorname{arc\,sen}x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
202. $x\operatorname{arc\,tg}x$. 203. $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. 204. $2\sqrt{1-x^2}$. 205. $\frac{2a^3}{x^4-a^4}$.
206. $x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)\cdot\frac{1}{x^2}$. 207. $(\operatorname{sen}x)^x(x\cdot\operatorname{cotg}x+\ln\operatorname{sen}x)$.

208. $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x\cdot(1+\ln\operatorname{sen} x)$. **209.** $2\cdot x^{\ln x-1}\cdot\ln x$. **210.** 0.
211. $x^{\operatorname{arc\,sen} x-1}\left(\operatorname{arc\,sen} x+\frac{x\cdot\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. **212.** $e^{x^x}\cdot x^x\cdot(1+\ln x)$.
213. $n\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}\cdot\left(1+\ln\frac{x}{n}\right)$

§ 12

1. $-\infty<x<2$ decrece, $+2<x<+\infty$ crece. **2.** $-\infty<x<1$ decrece, $+1<x<+\infty$ crece. **3.** $-\infty<x<0$ y $+1<x<+\infty$ crece, $0<x<1$ decrece. **4.** $-\infty<x<0$ y $+2<x<+\infty$ crece, $0<x<+2$ decrece. **5.** $-\infty<x<-1$ y $0<x<1$ decrece, $-1<x<0$ y $+1<x<+\infty$ crece. **6.** $-\infty<x<-\sqrt{2}$ y $0<x<\sqrt{2}$ decrece, $-\sqrt{2}<x<0$ y $+\sqrt{2}<x<+\infty$ crece. **7.** $\frac{5}{4}$ es mínimo. **8.** $\frac{3}{2}$ es máximo. **9.** $-\frac{3}{2}$ es máximo. **10.** -3 es máximo, 3 es mínimo. **11.** 0 es mínimo, $\frac{1}{3}$ es máximo. **12.** No hay extremo. **13.** No hay extremo. **14.** -2 es máximo, $\frac{4}{3}$ es mínimo. **15.** -1 es máximo, $\frac{7}{3}$ es mínimo. **16.** 0 y 2 son mínimos, 1 es máximo. **17.** -3 y 2 son mínimos, 1 es máximo. **18.** -1 es mínimo, 1 no hay extremo. **19.** $\frac{1}{2}$ es mínimo, -1 no hay extremo. **20.** $-\frac{1}{3}$ y 1 son mínimos, $\frac{1}{2}$ es máximo, -1 no hay extremo. **21.** $-2{,}5$ es máximo, 2,5 es mínimo. **22.** -1 es máximo, 5 es mínimo. **23.** -1 es mínimo, 1 es máximo. **24.** -1 es máximo, 3 es mínimo. **25.** -5 es máximo, 1 es mínimo. **26.** No hay extremo. **27.** 3 es mínimo. **28.** 2 es mínimo. **29.** -4 es máximo. **30.** 0 es máximo. **31.** 0 es mínimo, 2 es maximo. **32.** e es mínimo. 33. Cuando $x=\frac{\pi}{4}$, el máximo $=\sqrt{2}$. **34.** Cuando $x=\frac{\pi}{4}$, el mínimo $=2$; cuando $x=-\frac{\pi}{4}$, el máximo $=-2$. **35.** No hay extremo. **36.** Cuando $x=\frac{\pi}{3}$, el máximo $=\frac{3}{4}\sqrt{3}$. **37.** Cuando $x=\frac{\pi}{4}$, el mínimo $=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **38.** 5 y 5. **39.** 9 y 1. **40.** 1. **41.** $\frac{1}{2}$. **42.** Es un cuadrado. **43.** Es un cuadrado de lado $R\sqrt{2}$. **44.** Es un equilátero de lado $R\sqrt{3}$. **45.** Es isósceles. **46.** La altura del rectángulo tiene que ser igual al radio del semicírculo **47.** $R=\frac{1}{2}a$. **48.** $2R=H$. **49.** $R=\sqrt[6]{\frac{9v^2}{2\pi^2}}$, $H=R\sqrt{2}$. **50.** $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. **51.** La anchura es igual a $\frac{2}{3}$ de la altura. **52.** A 3 *km* del poblado. **53.** Transcurridas

4 horas. 54. $\frac{a}{\sqrt{2}}=0{,}7\ a$. 56. Concavidad *hacia* arriba, $x=0$ *es mí-* nimo. 57. Concavidad hacia abajo para $x<0$ y hacia arriba si $x>0$, $x=0$ es el punto de inflexión. 58. $x=0$ es máximo, $x=1$ es mínimo, $x=\frac{1}{2}$ *es punto de inflexión; es cóncava hacia abajo si* $x<\frac{1}{2}$, y hacia arriba si $x>\frac{1}{2}$. 59. Véase el ejercicio 11, $x=\frac{1}{6}$ es punto de inflexión; es convexa hacia arriba si $x<\frac{1}{6}$ y hacia abajo si $x>\frac{1}{6}$. 60. Véase el ejercicio 30; cóncava hacia arriba en los intervalos $-\infty<x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}<x<+\infty$, es cóncava hacia abajo en los intervalos $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<+\frac{\sqrt{2}}{2}$. 61. Véase el ejercicio 21; es cóncava hacia arriba si $x>0$, y hacia abajo si $x<0$, $x=0$ es punto de discontinuidad. 62. Véase el ejercicio 25; es cóncava hacia abajo si $x<-2$, *y hacia arriba si* $x>-2$; $x=-2$ *es punto de discontinuidad*. 63. $x=0$ es punto de discontinuidad, $x=1$ es punto de mínimo, $x=-\sqrt[3]{2}$ es punto de inflexión, cóncava hacia arriba en los intervalos $-\infty<x<-\sqrt[3]{2}$ y $0<x<+\infty$ y hacia abajo en el intervalo $-\sqrt[3]{2}<x<0$. 64. El campo de definición $-\infty<x\leqslant 4$, cuando $x=3$ hay máximo, concavidad hacia abajo. 65. $v_0=10$; $v_1=5$; $v_2=6$; $\alpha_0=-8$; $\alpha_1=-2$; $\alpha_2=4$; $v_{\min}=4\frac{2}{3}$ cuando $t=\frac{4}{3}$. *66.* $v_0=-ak$, $\alpha_0=ak^2$, 68. $v=\frac{a\omega}{\cos^2\omega t}$, $\alpha=-\frac{a\omega^2\operatorname{tg}\omega t}{\cos^2\omega t}$.

§ 13

2. $\Delta y=0{,}100601$; $dy=0{,}1$. 3. $\Delta y=-\frac{1}{2001}$; $dy=-\frac{1}{2000}$. 4. $(3ax^2+2bx+c)\,dx$. 5. $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right)dx$. 6. $\left(\frac{1}{C}+\frac{C}{x^2}\right)\cdot dx$. *7.* $\frac{2x\,dx}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$. 8. 0,0256. 9. $-0{,}125$. 10. $-\frac{2\,dx}{1-\operatorname{sen}2x}=-\operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$. 11. $\operatorname{tg}^4 x\,dx$. 12. $\frac{5\,dx}{2x}$. 13. $(1+\ln x)\,dx$. 14. $\frac{x\,dx}{1+x^2}$. 15. $\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. 16. $2e^x\cdot\cos x\,dx$. 17. 0,5 m^2, 2%. 18. 0,017 m^2, aproximadamente el 1,4%. 19. $\frac{1}{2}\left|\frac{dl}{l}\right|$.

§ 14

1. $\frac{1}{4}x^4+C$. 2. $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$. 3. $2\sqrt{x}+C$. 4. $-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$. 5. $\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3+C$. 6. $\frac{x}{2}(2+x-4x^2)+C$. 7. $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}+C$.

8. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$. 9. $2x+3\ln x+C$. 10. $\frac{1}{2}x^2+4x+$ $+4\ln x+C$. 11. $s=v_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2$. 12. $y=\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$. 13. $\sqrt{2x}\left(\frac{2x}{3}-1\right)+C$. 14. $\ln\frac{1}{1-x}+C$. 15. $-\frac{1}{x+1}+C$. 16. $-\frac{1}{x^4+a^4}+C$. 17. $-\frac{1}{8(x^2+a^2)^4}+C$. 18. $\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)+C$. 19. $2\ln(1+\sqrt{x})+C$. 20. Indicación: sacar $\sqrt{x}$ fuera de paréntesis. Respuesta: $2\ln(\sqrt{x}-1)+C$. 21. $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$. 22. $2\sqrt{\ln x}+C$. 23. $\frac{1}{2}\ln\ln x^2+C=\frac{1}{2}\ln\ln x+C_1$, donde $C=C_1+\frac{1}{2}\ln 2$. 24. $-\frac{e^{-4x}}{4}+$ $+C$. 25. $-\frac{1}{3\cdot e^x}+C$. 26. $6\cdot a^{2x}+C$. 27. $\frac{1}{8\ln 2}\cdot 2^{4x^2-8}+C$. 28. $\frac{x^3}{3}+$ $+4x^2+4x+\ln(x-1)+C$. 29. $\frac{x^3}{3}-x^2+3x+\ln(x+1)+C$. 30. $\frac{1}{3}(x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+C$. 31. $\frac{2}{9}(x^3-1)\cdot\sqrt{x^3-1}+C$. 32. $\ln(x^2+$ $+ax+b)+C$. 33. $2\sqrt{x^2+ax+b}+C$. 34. $\ln(e^x+e^{-x})+C$. 35. $a\ln(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})+C$. 36. $2(1+e^x)\sqrt{1+e^x}+C$. 37. $\frac{1}{5}\sqrt{(2x-1)^5}+$ $+\frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}+C$. 38. Indicación: $\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\left(1+\frac{1}{1+e^x}-1\right)dx$. Respuesta: $x-\ln(1+e^x)+C$. 39. Indicación. Racionalizar el denominador del quebrado. Respuesta: $\frac{2}{3a}[\sqrt{(x+a)^3}+\sqrt{x^3}]+C$. 40. $\frac{2}{3}[\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3}]+C$. 41. $\frac{x}{6}(3x+4\sqrt{x}+6)+C$. 42. $\frac{x}{20}(12\sqrt[3]{x^2}+15\sqrt[3]{x}+20)+C$. 43. $\ln \operatorname{arcsen} x+C$. 44. $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2+C$. 45. $\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^3}+C$. 46. $\frac{1}{2}\ln\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$. 47. $s=t^3+t^2$. 48. $s=\frac{1}{12}t^4+2t$. 49. $\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$. 50. $-\frac{1}{n}\cos(nx+a)+C$. 51. $\frac{5}{2}\operatorname{sen}\frac{2x-3}{5}+C$. 52. $-\frac{1}{2}\cos 2x-$ $-\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x+C$. 53. $\frac{1}{a}\operatorname{sen} ax-a\cdot\cos\frac{x}{a}+C$. 54. $a\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{a}+$ $+\frac{1}{a}\cos ax+C$. 55. $\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x+C$. 56. $\frac{1}{5}(\operatorname{tg} 5x+\operatorname{cotg} 5x)+C$. 59. $\sec x+C$. 60. $-\operatorname{cosec} x+C$. 61. $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}+C$. 62. $-2\sqrt{\operatorname{cotg} x}+C$ 63. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x+C$. 64. $-\frac{2}{3}\cos^3\frac{x}{2}+C$. 65. $-\frac{1}{\operatorname{sen} x}+C$.

66. $\frac{1}{2a\cdot\cos^2 ax}+C$. 67. $-\frac{1}{6}\cos(2x^3+3)+C$. 68. $-\frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3}{x}+C$.
69. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+C$. 70. $\frac{1}{2}\ln(1+2\operatorname{sen}x)+C$. 71. $\frac{1}{b}\ln(a-b\cos x)+C$.
72. $-\frac{1}{2(x+\operatorname{sen}x)^2}+C$. 73. $-4\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+C$. 74. $\frac{1}{a}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$. 75. Indicación. $\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x-1$. Respuesta: $-x+\operatorname{tg}x+C$. 76. $-x-\operatorname{cotg}x+C$.
77. $-e^{\cos x}+c$. 78. $\frac{a^{\operatorname{sen}x}}{\ln a}+C$. 79. $\operatorname{tg}x+\sec x+C$ o $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+$ $+C$. 80. $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}2x+\frac{1}{2}\operatorname{cosec}2x+C$. 81. $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}+C$.
82. $-\sqrt{1+\cos^2 x}+C$. 83. $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$. 84. $2\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+$ $+C$. 85. $\ln\operatorname{tg}x+C$. 86. $-2\cdot\operatorname{cotg}2x+C$. 87. $\frac{1}{2}(1-\operatorname{tg}x)^2+C$.
88. $-\frac{1}{2}(1+\operatorname{cotg}x)^2+C$. 89. $\ln(1+\operatorname{sen}x-2\cos x)+C$.
90. $\frac{1}{1-m}(x\cdot\operatorname{sen}x+\cos x-1)^{1-m}+C$. 91. $\operatorname{sen}x-\cos x$. 92. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t+6$.
93. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}+C$. 94. $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$ 95. $\frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5}{7}}x+C$.
96. $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x+C$. 97. $\frac{1}{12}\ln\frac{2+3x}{2-3x}+C$.
98. $\frac{1}{2\sqrt{35}}\ln\frac{\sqrt{7}+x\sqrt{5}}{\sqrt{7}-x\sqrt{5}}+C$. 99. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{3}+C$. 100. $\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}+C$.
101. $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{7}{5}}x+C$. 102. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{5}{7}}x+C$.
103. $\ln(x+\sqrt{x^2\pm 9})+C$. 104. $\ln(x+\sqrt{x^2\pm 4})+C$.
105. $\frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{4x^2-3})+C$. 106. $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln(x\sqrt{7}+\sqrt{1+7x^2})+C$.
107. $\frac{5}{2}\operatorname{arcsen}x^2+C$. 108. $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{x^3}{a}+C$. 109. $\operatorname{arctg}e^x+C$.
110. $\operatorname{arcsen}e^x+C$. 111. $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}x}{a}+C$. 112. $\frac{1}{2a}\ln\frac{a-\cos x}{a+\cos x}+C$.
113. $\operatorname{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}+C$. 114. $a\cdot\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$.
120. $\operatorname{arcsen}(\ln x)+C$. 121. $\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg}x\right)+C$.
122. $\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\cdot\operatorname{tg}x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\cdot\operatorname{tg}x}+C$. 123. $\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x+C$.
124. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$. 125. $-\frac{2}{3}\cos^3 x+\cos x+C$.

126. $\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x-\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x+C$. **127.** $-\frac{2}{5}\cos^5 x+C$. **128.** $\operatorname{sen} x+$ $+\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x+C$, o $\frac{1}{2}(1+\operatorname{sen} x)^2+C$, donde $C=\frac{1}{2}+C_1$. **129.** $-\cos x-$ $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x+C$, o $\frac{1}{2}(1-\cos x)^2+C_1$, donde $C=\frac{1}{2}+C_1$. **130.** $\frac{1}{2}x+$ $+\frac{1}{4a}\operatorname{sen} 2ax+C$. **131.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4a}\operatorname{sen} 2ax+C$. **132.** $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+$ $+\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x+C$. **133.** $\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x+\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x+C$. **134.** $\frac{1}{4}x+$ $+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{16}\operatorname{sen} 4x+C$ **135.** $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x-\ln\operatorname{sen} x+C$. **136.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x+x+C$.

§ 15

1. 45. **2.** 27. **3.** $\frac{1}{6}$. **4.** 15. **5.** $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **6.** 2. **7.** $2\frac{2}{3}$. **8.** $\ln\sqrt{5}$. **9.** $e-1$. **10.** $\frac{a^2-1}{a\ln a}$. **11.** $\frac{\pi}{4}$. **12.** $\frac{\pi}{6}$. **13.** $\frac{1}{3}$. **14.** $\frac{\pi}{4}$. **15.** $\frac{\pi}{4}$. **16.** $\frac{4}{15}$. **17.** 16,5. **18.** $\frac{1}{2}gt^2+10t$. **19.** x^4-16. **20.** $\frac{1}{3}\ln\frac{1+x^3}{2}$. **21.** $-\ln\cos x$. **22.** $-\frac{\cos 2x}{2}$. **23.** 1. **24.** $\ln a$. El logaritmo natural de los números $a>1$ es el valor del área comprendida entre la hipérbola $xy=1$ y el eje Ox entre los límites desde $x=1$ hasta $x=a$ y se llama también logaritmo hiperbólico. **25.** 18. **26.** $12\frac{1}{4}$. **27.** 11. **28.** 4. **29.** $\frac{4}{3}$. **30.** $\frac{1}{6}$. **31.** 2. **32.** $\frac{32}{15}\sqrt{2}$. **33.** $2\frac{2}{3}$. **34.** $\frac{2}{3}$. **35.** 4,5. **36.** 32. **37.** 8. **38.** 8. **39.** $2\pi+\frac{4}{3}$. **40.** $\frac{16}{3}\pi+4\sqrt{3}$. **44.** 3. **45.** $\frac{1}{3}$. **46.** 4. **47.** $\frac{1}{2}\pi y^2 x$, es decir, el volumen de un paraboloide de revolución es igual a la mitad del volumen de un cilindro que tenga la misma base, un círculo de radio y y la misma altura x. **48.** $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. **49.** π^2 unidades cúbicas. **50.** 4π. **51.** $9{,}6\pi$. **52.** 72π. **53.** $\frac{4}{3}\pi$. **54.** $\frac{44}{15}\pi$. **55.** $\pi r^2\cdot 2\pi b$. **56.** $\frac{\pi b^2}{3a^2}(x^3-3a^2x+2a^3)$; $\frac{\pi a^2}{3b^2}(y^3+3b^2y)$. **57.** 250 Tm. **58.** 48 Tm. **59.** 1.500 Tm. **60.** 100 kg. **61.** 1.350π $kg=4.241$ kg. **62.** $\frac{4}{3}ka^3$, donde k es el coeficiente de resistencia. **63.** $\frac{k(l_1-l_0)^2}{2e_0}$

64. 0,25 *Kgm*. **65.** 1,25 *Kgm*. **66.** $500\pi r^2 h^2$ *Kgm*. **67.** Aproximadamente 101,7 *Kgm*. **68.** $\mu\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_1}\right)$, donde μ es el coeficiente de proporcionalidad. **Indicación. La fuerza se toma con el signo menos, puesto que está dirigida al centro del cuerpo.**

§ 16

4. $y=Cx$, o $ax+bx=0$. **5.** $x^2+y^2=C$. **6.** $xy=C$. **7.** $Cxy+y-x=0$; $y-x=0$. **8.** $\operatorname{arctg} y=\ln|x|+C$; $\operatorname{arctg} y=\ln|x|+\frac{\pi}{4}$. **9.** $\sqrt{y}=x\ln x+C$; $\sqrt{y}=x\ln x-x+2$. **10.** $\operatorname{arcsen} y-\operatorname{arctg} x=C$; $\operatorname{arcsen} y-\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{4}$. **11.** $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{cotg}^2 y=C$. **12.** $(x^2+1)(y^2+1)=C$. **13.** $y=\ln(e^x+C)$. **14.** $x=C-\ln|1-e^y|$. **15.** $x=Ce^{-\frac{x}{y}}$. **16.** $x^2-2xy-y^2=C$. **17.** $y^2+2xy=C$. **18.** $y=Ce^{\frac{x}{y}}$. **19.** $\frac{x}{x^2+y^2}=C$. **20.** $s=t\ln(2t)$. **21.** $y=e^{3x}+Ce^{2x}$. **22.** $y=Cx^2-\frac{1}{x}$. **23.** $y=\frac{mx+C}{x^n}$. **24.** $s=\frac{t+C}{\operatorname{sen} t}$. **25.** $xy=1$. **26.** $y=x^3$. **27.** $y=Cx^2$. **28.** $x=(C-2\ln|y|)\,y$; $x=(4-2\ln|y|)\cdot y$. **29.** $y=Cx^2$. **30.** $(2y^2-x^2)^3=Cx^2$. **31.** $p=e^{-0,000167h}$. **32.** $dy=-\frac{2y}{100+t}\,dt$; $\approx 3,9$ *кг*. **33.** $y=\frac{1}{6}(x+a)^3+C_1x+C_2$. **34.** $C_4s^2+a^2+(C_1t+C_2)^2$. **35.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. **36.** $y=e^x(C_1+C_2x)$. **37.** $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen} 2x)$. **38.** $y=3e^x-e^{-3x}$. **39.** $y=1$. **40.** $y=2\operatorname{sen} 2x-\cos 2x$. **41.** $y=\operatorname{sen} x$. **42.** $s=A\operatorname{sen}\omega t$.

§ 17

1. $du=y^2z^3\,dx+2xyz^3\,dy+3xy^2z^2\,dz$. **2.** $du=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}$. **3.** $du=(y+b)\,dx+(x+a)\,dy$. **4.** $du=\frac{(x^2-y^2)(dx-dy)+2xy\,(dx+dy)}{(x+y)^2}$. **5.** $du=2n\,(x^2+y^2)^{n-1}(x\,dx+y\,dy)$. **6.** $du=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **7.** $du=\frac{2\,(x\,dx+y\,dy)}{x^2+y^2}$. **8.** $du=\frac{(2x+y)\,dx+(2y+x)\,dy}{x^2+xy+y^2}$ **9.** $du=\frac{2\,(x\,dy-y\,dx)}{x^2-y^2}$. **10.** $du=\cos(x+y)\,(dx+dy)$. **11.** $du=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}\times\cos\frac{y}{x}$. **12.** $du=\frac{z\,(dx+dy)-(x+y)\,dz}{z^2}\cos\frac{x+y}{z}$. **13.** $du=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}\operatorname{cotg}\frac{x}{y}$. **14.** $du=\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{y}{x}$. **15.** $du=e^{xy}(x\,dy+y\,dx)$.

16. $du=\frac{1}{x}\left(e^{\frac{y}{x}}dy+e^{\frac{z}{x}}dz\right)-\frac{dx}{x^2}\left(y\cdot e^{\frac{y}{x}}+ze^{\frac{z}{x}}\right)$. 17. $du=y^{x-1}\times$ $\times(y\ln y\,dx+x\,dy)$. 18. $du=x^{\operatorname{sen} y}\left(\frac{1}{x}\operatorname{sen} y\,dx+\cos y\ln x\,dy\right)$. 19. $du=\frac{y\,dx+x\,dy}{1+x^2y^2}$. 20. $du=\frac{y\,dx-x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$. 21. $du=$ $=\frac{yz\,dx+(x^2+xz)\,dy-xy\,dz}{(x+z)^2}$. 22. $du=(x\,dy+y\,dx)\operatorname{sen}(x+y)+$ $+xy\cos(x+y)(dx+dy)$. 23. $du=yz(xy)^{z-1}dx+xz(xy)^{z-1}dy+$ $+(xy)^z\ln(xy)\,dz$. 24. $du=z^{xy}\ln z\,(y\,dx+x\,dy)+xyz^{xy-1}\,dz$. 25. Disminuye aproximadamente en 0,12 *cm*. 26. 820π., alrededor del 3,3%. 27. $\frac{dg}{g}=\frac{ds}{s}-2\frac{dt}{t}$. 28. $\frac{ds}{s}=\frac{da}{a}+\frac{db}{b}+\frac{dc}{\operatorname{tg} c}$. 29. $\frac{dy}{dx}=-$ $-\frac{x(2x^2+y^2)}{y(x^2+2y^2)}$. 30. $\frac{dy}{y}=\frac{x}{y}\cdot\frac{a-1}{a+1}$. 31. $\frac{dy}{dx}=1$. Indicación. $\cos x=$ $=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}=\sqrt{1-\cos^2 y}$. 32. $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x-\operatorname{sen} y}{x\cdot\cos y}$. 33. $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{2-y}$. Indicación. $xe^y=y-1$. 34. $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{y^3}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{2(y^2+1)}{y^5}$. 35. $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\alpha\cdot\operatorname{sen} y}{(1-\alpha\cdot\cos y)^3}$. 36. $xx_1+yy_1=a^2$. 37. $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$. 38. $yy_1=p(x+x_1)$. 40. $y=\pm a$.

§ 18

1. $a^x=1+\frac{x\ln a}{1}+\frac{x^2\ln^2 a}{1\cdot 2}+\frac{x^3\ln^3 a}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots\ (-\infty<x<+\infty)$.

2. $\cos x=1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\dots 6}+\dots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

3. $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\dots(-1\leqslant x<+1)$.

4. $\underset{(-\infty<x<+\infty)}{\operatorname{sen}(a+x)}=\operatorname{sen} a+\frac{x}{1}\cos a-\frac{x^2}{1\cdot 2}\operatorname{sen} a-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cos a+\dots$

5. $\operatorname{sen}^2 x=\frac{2x^2}{1\cdot 2}-\frac{2^3\cdot x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2^5\cdot x^6}{1\cdot 2\dots 6}-\dots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

6. $\cos^2 x=1-\frac{2\cdot x^2}{1\cdot 2}+\frac{2^3\cdot x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{2^5\cdot x^6}{1\cdot 2\dots 6}+\dots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

7. $e^x=e^2+e^2(x-2)+\frac{e^2}{1\cdot 2}(x-2)^2+\dots$ 8. $\ln x=(x-1)-$ $-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\dots\ (1\leqslant x\leqslant 2)$. 9. $-3+4(x-1)+$ $+(x-1)^2+(x-1)^3$. 10. $(a+x)^m=a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\times$

$\times a^{m-2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}x^3+\ldots$ **11.** $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{1\cdot 2}-\ldots$ $(-\infty<x<+\infty)$. **12.** $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots(-1<x<1)$.

13. 1,037. **14.** $\operatorname{tg} x=1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{4}{1\cdot 2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{16}{1\cdot 2\cdot 3}\times$ $\times\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\ldots$ Suponiendo $x-\frac{\pi}{4}=46^\circ-45^\circ=1^\circ=\frac{\pi}{180}=0{,}017453$, hallamos $\operatorname{tg} 46^\circ=1{,}0355$.

F. BREVE INFORMACION HISTORICA

1°. Los elementos de las Matemáticas Superiores que se estudian en las escuelas de peritaje comprenden los apartados que aparecieron como teorías científicas en los siglos XVII y XVIII. En 1637, Descartes publicó su geometría, que fue apreciada por Engels como un viraje en el desarrollo de las matemáticas.

"El punto de viraje en las matemáticas — dijo— fue la *magnitud variable* de Descartes. Gracias a ello, a las matemáticas se incorporaron *el movimiento y la dialéctica*, y y gracias a esto *se hicieron necesarios inmediatamente el cálculo diferencial y el cálculo integral*, que surgieron al instante, y que fueron culminados absoluta y totalmente, y no descubiertos por Newton y Leibnitz" *.

Sin embargo, esta "culminación" no debe entenderse en el sentido de que hubiera sido dicha la última palabra en el cálculo diferencial e integral, sino como la terminación de las investigaciones de los precursores de Newton y y Leibnitz (Fermat, Descartes, Barrow y otros, que aplicaron ya el método de las magnitudes infinitamente pequeñas). Leibnitz (1646—1716) fundó de modo genial el canon del nuevo cálculo, completando las tesis fundamentales de éste por medio de un sistema de reglas y fórmulas. Mediante sus descubrimientos en el campo de la Mecánica, Newton (1642—1727) confirmó el método del cálculo diferencial e integral, trazándole una enorme perspectiva para su aplicación científico-práctica.

2°. En los siglos sucesivos continuó el desarrollo del análisis matemático, enriqueciéndose con nuevas generalizaciones. Les corresponde un gran mérito en esto a los matemáticos de Rusia y la Unión Soviética. Nos circunscribiremos solamente a unos cuantos, cuyos méritos son inconmensurables en el desarrollo de la ciencia mundial.

* Federico Engels, *Dialéctica de la Naturaleza*, Gospolitizdat 1952, pág. 206.

Desempeñó un papel de primer orden en el desarrollo del análisis, así como de otras partes de las matemáticas, el académico de Petersburgo Leonardo Euler (1707—1783). "Lean, lean a Euler, que es el maestro de todos nosotros", dijo Laplace (1749—1827), célebre matemático, mecánico y astrónomo francés. Los trabajos científicos de Euler abarcan todos los dominios de las matemáticas y están consagrados a su sistematización y desarrollo. Estos trabajos son notables por su armonía y concisión, por su originalidad y amplitud de criterio. Se deben a Euler procedimientos y métodos de resolución de ecuaciones diferenciales — el principal medio matemático de investigación de los procesos de la naturaleza — que todavía siguen figurando en los manuales de análisis matemático. Los trabajos de Euler se extienden asimismo a la Mecánica, la Hidrodinámica, la Optica y la Astronomía.

Corresponde un destacado lugar en la ciencia a las investigaciones del matemático de Petersburgo Mijaíl Ostrogradski (1801—1861), que hizo grandes descubrimientos en el cálculo integral. Su método de integración de cierto tipo de quebrados racionales y su fórmula de transformación de las integrales curvilíneas múltiples aparecen en todos los manuales de análisis.

El célebre geómetra ruso Nikolái Lobachevski (1792—1856) dedicó diversos trabajos al análisis matemático, en los que expuso originales criterios referentes a diversas cuestiones, aventajando con ello a los hombres de ciencia del Occidente.

Lobachevski fundó una nueva geometría, la geometría no euclidiana. Las ideas de Lobachevski influyeron considerablemente en todos los principios previos y formas de la estructura de las matemáticas, pasando a ser principios rectores en las diversas ramas de las ciencias exactas— la Mecánica, la Física y la Astronomía —, ocupando un lugar primordial (decisivo en algunas cuestiones) en la Filosofía. Está muy lejos de haber sido completada hasta el fin la geometría fundada por Lobachevski. Sus variadas aplicaciones se encuentran en una fase de desarrollo y de intensas investigaciones.

El genial matemático de Petersburgo académico Pafnuti Chébishev (1821—1894) fundó una excelente escuela de las ciencias exactas. "Entre los numerosos problemas hay uno de excepcional importancia—dijo Chébishev—

Cómo se debe disponer de los medios propios para conseguir el mayor provecho posible". Precisamente por eso, "la mayor parte de las cuestiones prácticas se convierte en problemas de las magnitudes máximas y mínimas, que son completamente nuevos para la ciencia, y sólo resolviéndolos podemos dar satisfacción a las exigencias de la práctica, que en todas partes busca lo mejor, lo más ventajoso".

La solución de los problemas prácticos (construcción de mecanismos) hizo que Chébishev creara una parte nueva de las matemáticas, la teoría de la aproximación óptima de las funciones. El desarrollo de la teoría de la aproximación de las funciones de Chébishev ha conducido en la actualidad a la teoría constructiva de las funciones, que tiene gran aplicación. Las obras de Chébishev son muy variadas. Además de resolver cuestiones prácticas, halló también la solución de cuestiones teóricas excepcionalmente complicadas. Por ejemplo, sus descubrimientos geniales en la teoría de los números (la ley de la distribución de los números primos); en el cálculo de probabilidades (la ley de los grandes números); en el cálculo integral halló una fórmula para el cálculo aproximado de las integrales definidas y demostró la imposibilidad de expresar ciertas integrales por medio de funciones elementales.

Son continuadores de Chébishev en el campo del cálculo de probabilidades y de la teoría de la aproximación de las funciones el gran matemático soviético S. Bernshtéin (n. 1880) y varios de sus alumnos.

En el siglo XX, debido a la actividad científica del académico Nikolái Luzin (1883—1950), se formó la escuela matemática de Moscú, que llegó a su apogeo en la época soviética. Por la amplitud e importancia de las cuestiones científicas que estudia y por sus resultados, esa escuela ocupa el primer lugar del mundo. En el campo del análisis se destacan los matemáticos P. Alexándrov, A. Kolmogórov, D. Menshov, I. Priválov y A. Tíjonov.

Durante la época soviética se han desarrollado inconmensurablemente las matemáticas. No sólo las ciudades más importantes (Moscú y Leningrado), sino también otras como Kíev, Tbilisi, Járkov, Odesa, Sarátov, Ereván, etc. se han convertido en centros científicos en los que muchos jóvenes han llegado a ser hombres de ciencia y enriquecen las matemáticas con nuevas investigaciones y descubrimientos.

INDICE

A. FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA ANALITICA PLANA

Capítulo I. Método de coordenadas

Capítulo II. La recta

Capítulo III. Curvas de segundo orden

B. ELEMENTOS DEL CALCULO DIFERENCIAL

Capítulo IV. Teoría de los límites

Capítulo V. **La función y su continuidad**

Capítulo VI. **Función derivada**

Capítulo VII. **Derivadas de las funciones elementales**

Capítulo VIII. Aplicación de las derivadas para el estudio de las funciones

Capítulo IX. **Diferencial**

C. ELEMENTOS DEL CALCULO INTEGRAL

Capítulo X. **Integral indefinida**

Capítulo XI. **La integral definida y su aplicación**

C a p í t u l o XII. **Ecuaciones diferenciales**

D. SUPLEMENTOS

C a p í t u l o XIII. **Derivación de funciones de varias variables**

C a p í t u l o XIV. **Desarrollo de funciones en series de potenciales**

E. PROBLEMAS Y EJERCICIOS

GUELFAND I., GLAGOLEVA E., KIRILOV A.

Método de coordenadas

Es un libro de Israil Guelfand, doctor en ciencias físico-matemáticas y profesor de la Universidad de Moscú, de Alejandro Kirilov, candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas y de Elena Glagoleva, colaboradora científica. Es el primero de la serie de matemáticas: «Biblioteca de la escuela físico-matemática».

En esta obra se describe el método de las coordenadas, es decir, el procedimiento para determinar la posición de un punto o cuerpo con ayuda de cifras o de otros símbolos.

De un modo ingenioso y comprensible, a la vez que rigurosamente científico, se trata de las coordenadas de un punto sobre una recta, sobre un plano, en el espacio; del espacio cuadridimensional, del cubo cuadridimensional y de otras cuestiones de interés relacionadas con la matemática moderna.

En cada una de las partes del libro se dan tareas y preguntas a resolver por el lector. Es un libro de matemáticas para los escolares del tercer año be las escuelas especiales de matemáticas y no exige conocimientos especiales que no estén incluidos en el programa escolar.

Todo el que se interese en las matemáticas, leerá este libro con satisfacción.

Formato 13,5 × 20,5 cm. En rustica con sobrecubierta. 48 págs.